ISSN 0987-0806

JANVIER - FEVRIER

tangente

L'AVENTURE MATHEMATIQUE

SAVOIRS

LA LOGIQUE FLOUE

ROBERT MUSIL

GEOMETRIE DANS L'ESPACE : FAITES LE POINT !

DES RALLYES, EN VOILA !

IL COURT, IL COURT, LE THEOREME

DES SABLES POUR ROCARD

25

32 FRANCS

LE CONGRÈS MATHÉMATIQUE JUNIOR

CITÉ DES SCIENCES ET DE L'INDUSTRIE DE LA VILLETTE

"des jeunes sur la planète Maths", dans un voyage extraordinaire animé par les jeunes, les mathématiques et les mathématiciens

(voir page 15)

6, 7, 8 juillet 1992

RENSEIGNEMENTS ET CONTACTS :
APM-CMJ / 26, RUE DUMÉRIL, 75013 PARIS
TÉL : (1) 43 31 34 05

SOMMAIRE

Passerelles

Robert Musil : Désarrois devant les imaginaires
Rencontre avec des nombres du troisième type pour l'élève Törless.
page 4

Actions

La logique floue
Un monde flou, flou, flou...Mais des applications bien concrètes. Pas si flous les Japonais !
page 16

Des sablés pour Rocard
Pour écouter les extra-terrestres, tendez les oreilles – pardon, les antennes – et faites des maths !
page 32

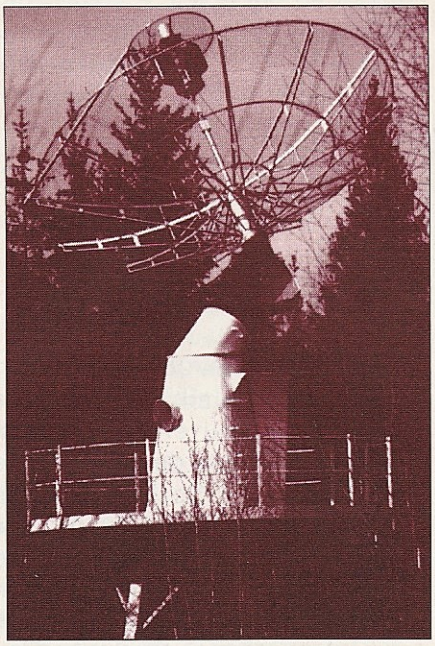
Savoirs

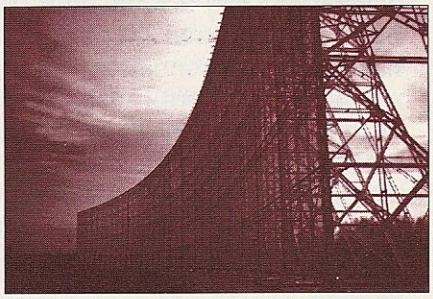
Duel au sommet
Qui va gagner ? Celui qui ne peut pas perdre ou celui qui gagne toujours ?
page 10

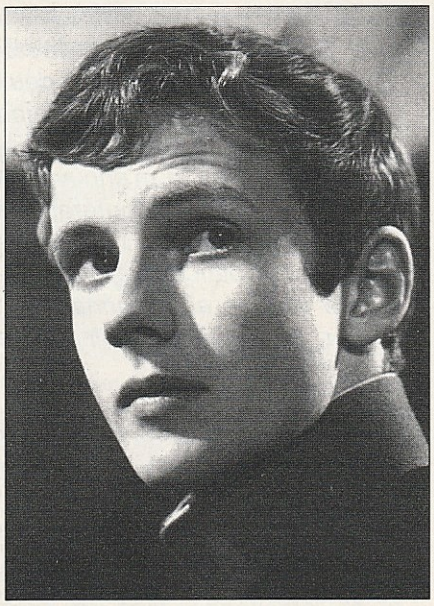
De l'épine à la rose
Les fractions ont des épines qui cachent parfois de bien jolies fleurs d'arithmétique. Cultivez votre jardin mathématique.
page 12

Playmath

L'ovale de Cassini
Pour faire l'œuf, il faut parfois aller jusqu'au 4e degré ! Du tout cuit.
page 26







Méthodes

Spot sur la géométrie dans l'espace
Grâce à *Tangente*, soyez à l'aise dans vos trois dimensions.
page 22

Jeux et Problèmes

Sixième championnat
Il faut que des quarts de finale soient ouverts ou fermés. En tout état de cause, voici les solutions.
Page 42

Jeux et énigmes primées
page 20

Histoires

Il court, il court, le théorème
De Platon à Cauchy, suivez à la piste un théorème qui gagne à être connu !
page 28

Des rallyes, en voilà !
«My rallye esto wunderschön...»
Les rallyes naissent et prospèrent dans tous les coins du monde.
page 36

En bref	**page 8**
Courrier	**page 40**
Notes de lecture	**page 30**
Solutions	**page 49**
Congrès Mathématique Junior	**page 15**
Abonnements	**pages 48 et 50**

ROBERT MUSIL : DESARROIS DEVANT LES IMAGINAIRES

Les désarrois de l'élève Törless. Le film est resté dans les mémoires . Il est tiré d'un roman de Robert Musil, paru au début du siècle et qui bénéficia des faveurs du public. Bien que les mathématiques y tiennent une certaine place.

EN ÉVOQUANT Robert Musil, Jacques Bouveresse, professeur de philosophie en Sorbonne parle «d'un écrivain aussi peu "littéraire" que (lui)». En effet, Robert Musil, né le 6 novembre 1880 à Klagenfurt, en Autriche, est issu d'une vieille famille de fonctionnaires, d'ingénieurs et d'officiers. Aussi était-il destiné aux armes. Mais, finalement, il suit et termine des études d'ingénieur à l'Ecole Polytechnique de Brünn, en Moravie, où enseigne son père.

Nonobstant, dans un brouillon intitulé *Testament II* et datant de 1932, il écrit : *«J'avais vingt-deux ans, j'étais déjà ingénieur, et mon métier ne me donnait pas satisfaction. Pourquoi je m'ennuyais à ce point, je ne le raconterai pas ici. Stuttgart, où ces choses se passaient, m'était étranger et hostile, je voulais abandonner mon métier, et étudier la philosophie (ce que je fis bientôt).»*

Ainsi, de 1903 à 1908, il part poursuivre des études philosophiques à l'Université de Berlin. En 1906 paraît son premier roman *Les désarrois de l'élève Törless.* Aux confins du siècle dernier, l'élève Törless, interne dans un collège autrichien huppé, éprouve les désarrois liés à l'éloignement familial. Musil a lui-même été élève dans les internats militaires de Eisenstandt et de Märisch-Weisskirchen, en Moravie. Toutefois, il écrira ou projettera d'écrire à un certain monsieur W., probablement un critique littéraire, le rectificatif suivant : *«Je vous prierai enfin de bien vouloir ne rien écrire sur Märisch-Weisskirchen. Le lien du livre avec cette école, dont j'ai été l'élève, est tout extérieur.»* (Journal).

Désarrois mathématiques

Le roman décrit, comme l'indique son titre, les désarrois de l'élève Törless. Ils sont de trois ordres : charnels, moraux, et intellectuels. Charnels, par les "amitiés particulières" dépeintes, ainsi que par la fascination physique exercée par la prostituée Bozena.Moraux, par l'attitude d'humiliation, annonciatrice des ères concentrationnaires, de Reiting et Beineberg, un temps celle de Törless, envers leur condisciple Basini.

Les désarrois intellectuels nous intéressent plus directement. Après que Törless se fût préoccupé de la notion d'infini, le lecteur reste sur sa faim car, écrit Musil : «*Törless n'avait jamais cherché à*

«Naguère, tout était clair et parfaitement en ordre dans ma tête ; maintenant, mes pensées me font l'effet de nuages entre lesquels il y aurait des trous ... Les mathématiques ont sûrement raison ; mais qu'en est-il de mon esprit ?»

Le Cercle de Vienne

Robert Musil a soutenu une thèse sur Ernst March sous la direction de Carl Stumpf, avec lequel il se fâcha, à la suite du succès obtenu par *Les désarrois de l'élève Törless.*

Les travaux de March sont l'une des sources du Cercle de Vienne. Le mérite du Cercle est d'avoir envisagé une synthèse entre l'empirisme logique de March qui, en tant que physicien, réduisait l'expérience à un jeu de sensations, et les idées de Russell et Whitehead, exprimées dans les *Principia Mathematica*, selon lesquelles les mathématiques se réduiraient à la logique.

Schlick, lorsqu'il fonda le Cercle de Vienne en 1924, obtint très vite l'adhésion de Wittgenstein, avant sa conversion qui suivit le *Tractatus*, ainsi que celle de Carnap. *La syntaxe logique du langage de Carnap* (1934), fit une telle impression sur Musil qu'il en recommanda la lecture à Karl Baedeker en ces termes : *«Je ne peux me représenter une activité féconde à la longue sans une pratique approfondie des mathématiques et de la psychologie... L'idée me vient de vous conseiller de jeter par exemple un coup d'oeil (et pas plus) à la* Syntaxe logique *de Carnap.»*

Le projet ultime de cette Ecole est, comme le positivisme classique d'Auguste Comte, d'obtenir une unification du savoir scientifique et une méthode commune à toutes les disciplines scientifiques afin de récuser les faux problèmes empoisonnant l'épistémologie (de vérifier leur sens). Pour aboutir à cette fin, deux conditions sont mises en avant : respecter les faits, ce qui se trouve déjà dans le positivisme logique, et adopter un langage commun et exact, ce qui assure l'originalité du Cercle de Vienne. Pour justifier le deuxième point, Charles W. Morris utilise une superbe expression métaphorique, la *«débabélisation»* des sciences. Il est vrai que, sous un certain angle, on peut percevoir l'ensemble des sciences comme une immense et vertigineuse Tour de Babel, ou peut-être de Pise.

La thèse de Musil sur March est très critique. Cependant, il retient un élément simple mais essentiel de l'épistémologie de March : la possibilité d'être à chaque instant autre que ce qu'elle est fait partie de l'essence même de la science.

en savoir plus». Cependant, au cours d'une leçon de mathématiques, Törless se questionne à nouveau, cette fois sur les nombres imaginaires (l'ensemble de ces nombres est construit à partir d'un nombre nommé *i*, dont le carré est égal à – 1).

Törless échafaude un début de raisonnement : dans cette affaire, qui l'inquiète, il constate qu'on part de nombres, de *«chiffres parfaitement solides"»*, pour arriver à de tels chiffres en passant par *«quelque chose qui n'existe pas»* ! Il compare ce procédé à la construction d'un pont *«qui n'a que des piles extrêmes»*. Il discute avec Beineberg qui clôt le débat par un cinglant : *«D'ailleurs toute cette histoire m'intéresse fort peu.»*

C'est pourquoi Törless va trouver son professeur de mathématiques, *«un jeune homme de trente ans au plus, les cheveux blonds, tout en nerfs ; un mathématicien très capable, qui avait déjà soumis à l'Académie une ou deux communications appréciées.»*

Première maille

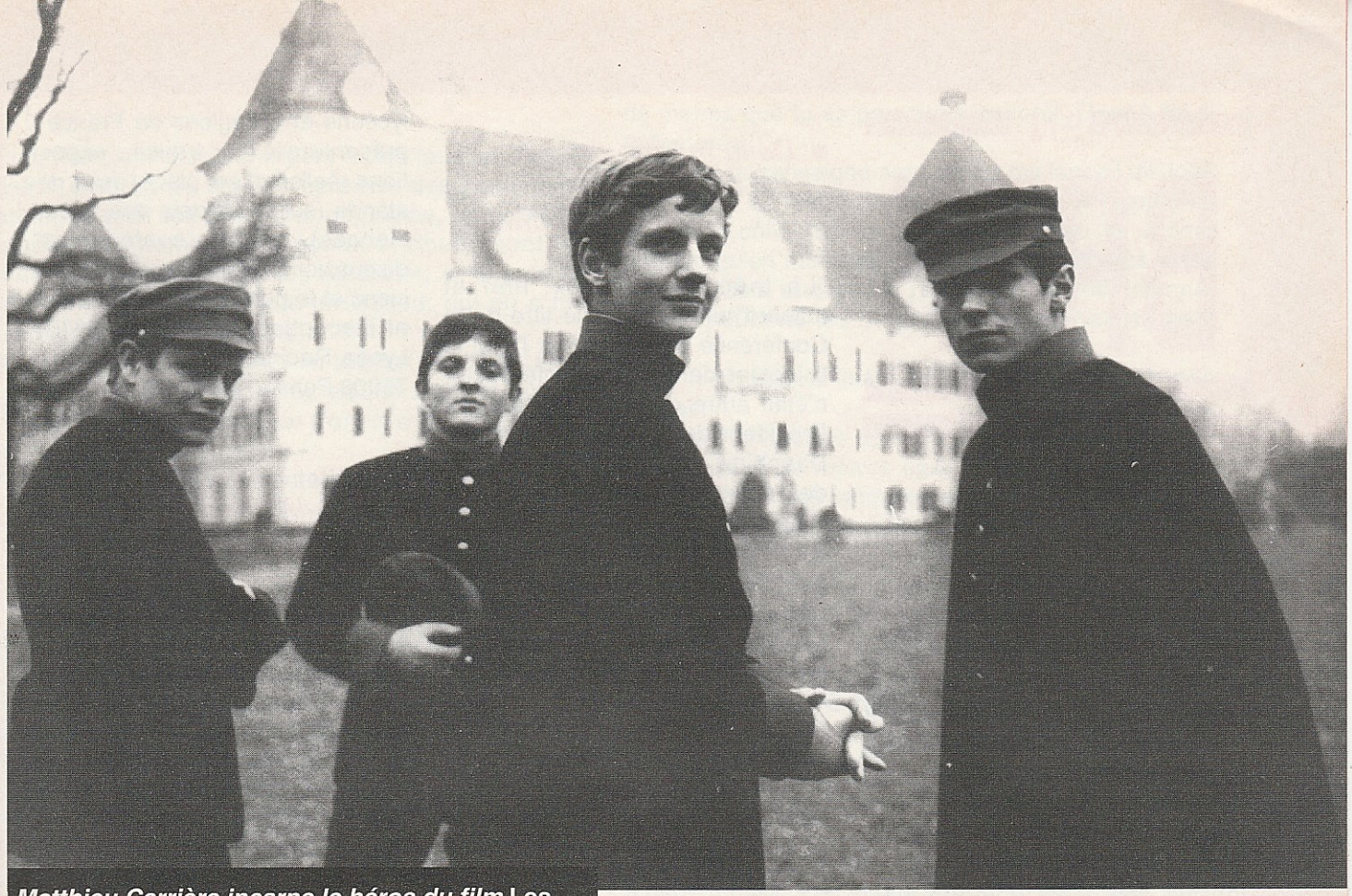
Dans notre perception du roman, il s'agit d'un moment phare et fort du livre. Moment phare et fort car le professeur se trouve dans l'incapacité d'éclaircir les problèmes soulevés. Beineberg, prévenu du déroulement de la rencontre entre Törless et leur professeur, ne peut s'empêcher de s'écrier : *«Ils* (les professeurs de mathématiques) *se contentent de jeter un coup d'oeil en arrière pour s'assurer que le fil qu'ils sécrètent ne s'est pas rompu au dernier tournant. C'est pourquoi ton genre de questions les embarrasse. Elles les empêchent de retrouver leur chemin. ...* (ils) *n'ont jamais fait que s'envelopper d'un filet dont chaque maille renforce la précédente, de sorte que l'ensemble a l'air merveilleusement naturel ; mais où se cache la première, celle dont tout le reste dépend, nul ne le sait.»*

Le roman de Musil ne contient pas de références philosophiques poussées. N'oublions pas que Musil n'a alors que vingt-six ans et qu'il vient seulement de se pencher sur la philosophie. Il relate simplement une interrogation sur les fondements des mathématiques, une recherche de la *«première maille»*, venant d'un adolescent. Une étude littéraire précise du passage détaillant la visite de Törless chez son professeur atteste de l'embarras dans lequel est plongé ce dernier.

Incontestablement, il y a aussi désarroi chez le professeur, comme si, à travers ces hésitations, un doute, une remise en cause à l'égard des mathématiques s'installaient dans l'esprit de Törless qui affirme : *«Naguère, tout était clair et parfaitement en ordre dans ma tête ; maintenant, mes pensées me font l'effet de nuages entre lesquels il y aurait des trous... Les mathématiques ont sûrement raison, mais qu'en est-il de mon esprit ? Mais les autres ? Sont-ils tout à fait imperméables à cela ? Comment le voient-ils ? Ou ne le voient-ils vraiment pas ?»*

Ce premier roman est remarquablement accueilli. Deux ans plus tard, en 1908, Musil soutient sa thèse de doctorat sur Ernst March, puis renonce définitivement à une carrière universitaire pour se consacrer entièrement à la littérature.

Durant la Première Guerre Mondiale,



Matthieu Carrière incarne le héros du film* Les désarrois de l'élève Törless*, réalisé en 1965 par Volker Schlöndorff.

il se bat contre l'Italie en Tyrol du sud. Puis, à partir de 1918, il est nommé au quartier général de la presse, à Vienne. Son séjour de 1931-1933 à Berlin coïncide avec la parution du premier tome de *L'homme sans qualités*, en 1931, et de la première partie du deuxième tome, en 1933.

■ *L'aventure scientifique*

C'est alors qu'il commence à fréquenter le domicile de Richard Von Mises, qu'il ne faudrait confondre avec un salon comme celui de Madame Verdurin, caractéristique de ceux du faubourg Saint-Germain, et qu'a minutieusement décrit Marcel Proust. Von Mises est aussi bien mathématicien, théoricien des probabilités, que philosophe apparenté au cercle de Vienne (voir encadré), que fervent admirateur du poète Rilke, auquel il consacre articles, préfaces et travaux bibliographiques.

L'expression de Jacques Bouveresse se fonde sur l'opinion de Musil selon laquelle les aventuriers de l'esprit du XX è siècle ne sont plus seulement les philosophes ou les artistes, mais aussi les scientifiques.

Cette position s'exprime de multiples façons dans l'œuvre musilienne, en particulier à travers des phrases comme : *«Toute l'audace intellectuelle réside aujourd'hui dans les Sciences exactes. Ce n'est pas de Goethe, Hebbel, Hölderlin que nous apprendrons, mais de Mach, Lorentz, Einstein, Minkowski, de Couturat, Russell, Peano.»*.

Ou, sous le propos de Ervin P. Hexner : *«La sphère des intérêts intellectuels de Musil était extrêmement étendue et féconde. La théorie des nombres de Frege, la mutation philosophique radicale de Wittgenstein après la publication de son* Tractatus, *le rapport de Santayana aux institutions traditionnelles de la Patrie et de l'Eglise, le rationalisme de Condorcet, les fondements d'une éthique agnostique, les relations entre la logique et les mathématiques.»*

En 1933, il quitte Berlin pour Vienne. Mais, en 1938, après l'Anschluss, il abandonne l'Autriche pour la Suisse où il s'installe, d'abord à Zürich, puis à Genève. Il meurt dans cette ville, le 15 avril 1942, sans gloire aucune. Son grand roman, *L'homme sans qualités*, restera inachevé.

Saïd Iaharene
Norbert Verdier

Bibliographie

Robert Musil, *Les désarrois de l'élève Törless*, Seuil, traduction de P. Jaccottet, 1960.
L'homme sans qualités, tome I (1956) et tome II (1961), Seuil.
L'Arc, numéro consacré à Robert Musil, article de Jacques Bouveresse «La science sourit dans sa barbe ...», p. 8-31, Librairie Duponcelle, 1990.
Logique et connaissance scientifique p. 80-105, sous la direction de Jean Piaget, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard, 1967.

EN BREF

Les conférences de l'I.C.M.

L'Institut de calcul mathématique se consacre au développement et à la promotion des mathématiques fondamentales et appliquées.
Pour de nombreux phénomènes mal connus, un modèle scientifique y est mis au point, permettant un approche théorique plus satisfaisante du problème : traitement du signal, aide à la décision, évolution des marchés financiers et économiques, etc.
A l'inverse, l'ICM permet aux industriels de traiter leurs problèmes quotidiens à l'aide d'outils mathématiques existants qu'il suffit de mettre en oeuvre : optimisation, contrôle, gestion des stocks, tests de fiabilité, problèmes de codage, ...
L'ICM a d'autres activités, dont la formation ou l'échange international de chercheurs.
Tangente a apprécié parmi elles l'organisation d'une série de conférences au Palais de la Découverte, dans le cadre de son "Plan de Promotion de la Recherche". Ces conférences, portant sur des sujets actuels du développement des mathématiques, sont données par des universitaires de talent. Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'elles restent à la portée de tous, y compris les non spécialistes, tout en donnant des éclairages sur les progrès les plus récents de la recherche. Nous vous invitons à demander à recevoir les programmes à : ICM, Université de Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, tel : 47 00 48 19.

De la théorie des jeux à l'étude du comportement humain.

"La théorie des Jeux, hier et aujourd'hui". Tel était le titre de la Conférence organisée par l'ICM le 9 janvier dernier. Le conférencier n'était autre que M. Ivar Ekeland, Président de l'Université de Paris Dauphine, et auteur, notamment, des deux ouvrages : "Le Calcul, l'Imprévu", et "Au Hasard".
Empruntant ses exemples aux guerres de l'antiquité aussi bien qu'au jeu de nim ou d'échecs, M. Ekeland a commencé par aborder les conflits purs, premiers objets historiquement étudiés par cette théorie. Puis les situations à n joueurs entraînant des relations de lutte et de coopération.
Mais la partie la plus "moderne" et la plus saisissante de l'exposé concerne l'évolution de cette théorie des jeux vers une théorie de l'information et des relations humaines, remarquablement mise en valeur par des exemples d'une grande force.
Ainsi, l'intérêt d'une "stratégie mixte" (on tire au sort sa réaction) pour le gardien de but face au tireur du penalty, le dilemme du prisonnier ("donner" ou pas son complice ?), et la divergence des notions d'utilité collective et d'utilité particulière lorsqu'il s'agit de choisir son moyen de locomotion dans une ville (bus ou voiture ?), divergence qui conduit à l'équilibre le plus défavorable pour la collectivité.
Axiome fondamental de cette théorie des relations humaines : *il n'existe pas d'engagement irrévocable*. Si vous n'en êtes pas persuadé, Ivar Ekeland vous en donnera une démonstration magistrale.

Congrès Math en Jeans

L'association Math en Jeans, dont Tangente vous a abondamment parlé, organise son congrès au Palais de la Découverte, entre le 11 et le 14 avril prochains. Les lycéens et collégiens de France y présenteront leur travail : expositions réalisées sur place, dans des stands (sur le modèle des expo-sciences), courtes "conférences", discussions avec des mathématiciens et le public. Renseignements et inscriptions auprès de AMEJ, Lycée Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris.

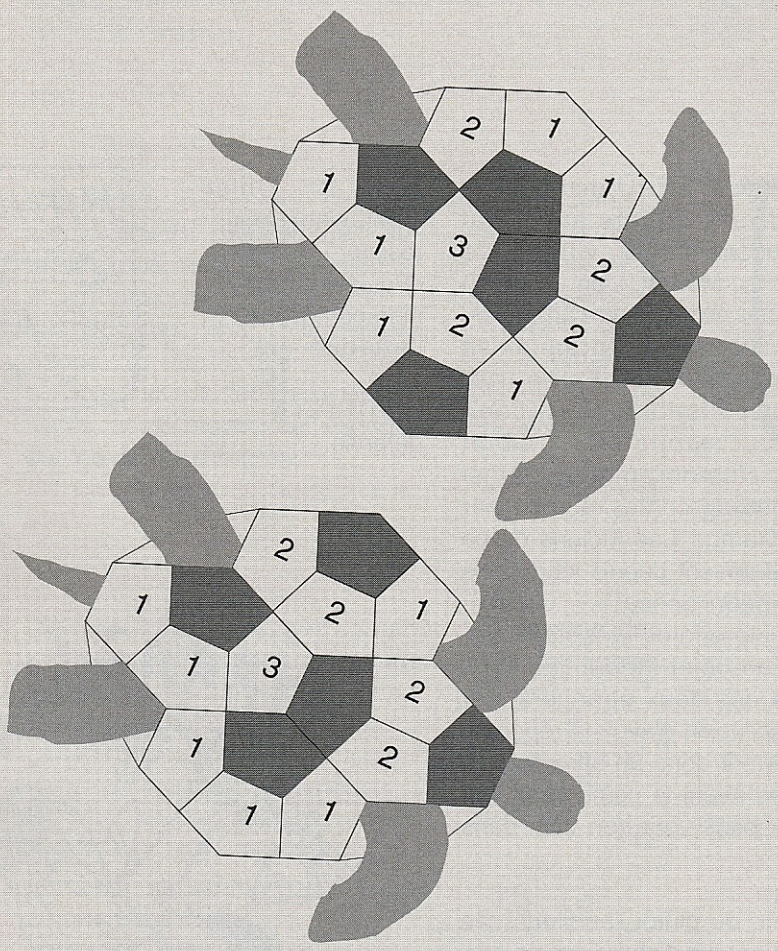
Juillet à Parthenay : Logic Flip et Université mathématique d'été

La ville de Parthenay organise chaque année le FLIP (Festival ludique international de Parthenay) rassemblement de centaines d'animations autour du jeu, certaines destinées aux gens de la rue, d'autres à des spécialistes ayant fait le déplacement. Les jeux mathématiques y jouent un rôle non négligeable depuis l'été 87 où Parthenay accueillit la première finale d'un certain championnat de France des jeux mathématiques et logiques. Cette année, deux manifestations mathématiques mériteront le détour :
Le "Logic Flip", une compétition basée sur des tests de logique, destinée aux collégiens, quit permet d'offrir aux lauréats et à leurs professeurs un fabuleux voyage en Floride. Les éliminatoires ont lieu le premier avril dans les classes. Les professeurs intéressés peuvent écrire à "Logoc Flip, FFJM, centre commercial de Châteaugaillard, av Foch, 94700 Maisons Alfort.
L'Université mathématique d'été, organisée par la FFJM entre le 8 et le 16 juillet, et ouverte à deux niveaux : *Promotion Archimède*, pour les collégiens accédant aux classes de 5°, 4°, et 3°, *Promotion Descartes* pour les élèves entrant en seconde et première. Cette dernière catégorie, parrainée par Tangente, commencera par assister à la Villette au Congrès Mathématique Junior de mathématiques. Renseignements auprès de la FFJM, 31 av des Gobelins 75013 Paris, et dans le prochain numéro de Tangente.

UNE NOUVELLE COLLECTION : *JEUX EN POCHE*, PRÉSENTE

DEUX LIVRES D'ANNALES 1991

PARAISSANT EN FÉVRIER 1992



LES PENTAGONES PATAGONS

contenant les problèmes les plus faciles du championnat.
Format poche. Prix : 48 F

LA BIROULETTE RUSSE

avec les autes problèmes et les problèmes de tournois et rallyes.
Format poche. Prix : 48 F

Frais d'envoi forfaitaires : 25 F. Adressez votre commande à FFJM, Centre Commercial de Châteaugaillard, avenue Foch, 94700 Maisons Alfort

Si vous commandez les deux volumes, vous recevrez un hors série sur les jeux mathématiques. Demandez-le en commandant.

PROFITEZ-EN POUR COMMANDER,
sans frais de port supplémentaire (25F, quel que soit le nombre de livres commandés),
LES ANNALES DES PRÉCÉDENTS CHAMPIONNATS
(Collection Jeux Mathématiques)

CHAMPIONNAT 88 :
Volume 3 : 38 F

CHAMPIONNAT 89 :
Les mètres du mystère : 48 F
La fraction du bicentenaire : 48 F

CHAMPIONNAT 90 :
Le triangle patriotique : 48 F
Les rouges et les noirs : 48 F

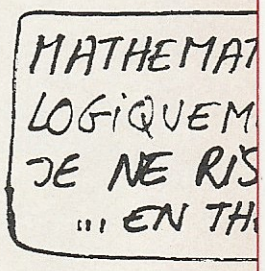
DUEL AU SOMMET

Ils sont là, face à face, prêts pour le combat. D'un côté, Force Irrésistible : nul ne peut l'arrêter. De l'autre, Objet Inébranlable : rien ne peut le détruire. Qui va l'emporter ? Bien logicien qui pourrait répondre.

UN BEAU matin, deux étrangers arrivèrent dans le village de Mowak. L'un venait du Nord, l'autre arrivait du Sud. Le premier se nommait Force Irrésistible, le second s'appelait Objet Inébranlable." Ainsi commence ce conte, raconté par William Camus. Les Indiens de ce village se posent depuis longtemps une question délicate : "Qu'arriverait-il si une force irrésistible rencontrait un objet inébranlable ?". L'arrivée des deux étrangers leur donne l'occasion d'avoir la réponse. Ils organisent donc un affrontement entre eux. Avant le combat, spéculations et paris vont bon train dans la tribu.

Le lecteur, ou plutôt l'auditeur, ces contes ayant été d'abord narrés oralement, est en fait appelé à chercher lui-même la solution, avant que le combat ne lui soit raconté. Essayons donc d'imaginer une issue à l'affrontement.

Première constatation, le combat ne peut donner un vainqueur et un vaincu, par définition de chacun des deux lutteurs. C'est d'ailleurs ce qui fait tout l'intérêt du problème. Pourtant, on peut constater, en interrogeant des personnes sur la question, qu'elles font en général plutôt confiance à Force Irrésistible pour l'emporter plutôt qu'à Objet Inébranlable pour résister ! Comme quoi, selon l'opinion commune, l'attaque est bien la meilleure défense.



■ Deux vainqueurs

Deuxième constatation : le combat ne peut pas donner non plus deux vaincus (d'une manière ou d'une autre), car alors les deux lutteurs ne seraient pas ce qu'ils sont. C'est cependant ce que pensèrent les Mowaks, qui conclurent leur histoire en disant que les forces s'annulent entre elles, sans préciser davantage comment, et que finalement personne n'a gagné.

Conclusion : pour ne pas contredire leur définition respective, le combat doit avoir une issue qui donne la victoire aux deux adversaires en même temps !

Cette issue est-elle possible ? Dans le combat, les intérêts des lutteurs sont rigoureusement antagonistes. Mathématiquement, le triomphe de l'un est équivalent à la défaite de l'autre. Les deux combattants ne peuvent donc pas, logiquement, vaincre ensemble. Alors? Il semble bien que le problème n'ait pas de solution. Mais il faut pourtant que le combat se déroule, et ait une issue.

En fait, ce sont les définitions elles-mêmes qui posent problème. Par définition, Force Irrésistible est telle qu'aucun objet ne lui résistera. Quel que soit son adversaire, Force Irrésistible vaincra. Un objet inébranlable ne peut donc pas exister, car sinon il existerait un objet que Force Irrésistible ne peut renverser, donc Force Irrésistible ne serait justement pas irrésistible. Autrement dit, tous les objets doivent être ébranlables, ne serait-ce que par Force Irrésistible.

■ Deux mondes distincts

Conséquence : les définitions des deux athlètes sont contradictoires. Elles ne peuvent pas être vraies simultanément. Les deux lutteurs appartiennent à deux univers distincts et inaccessibles l'un à l'autre. L'idée de leur combat est donc un non-sens, au même titre que c'est un non-sens d'imaginer de mettre une bille blanche et une bille noire dans un sac que l'on secouerait pour voir laquelle prendrait la couleur de l'autre. Les deux boules forment chacune un "univers", sans point commun avec celui de l'autre bille.

Les deux lutteurs Indiens seraient donc chacun enfermés dans leur univers, et ils ne peuvent pas se battre. La réponse au problème posé est donc, en clair, que le combat n'est pas envisageable !

"L'un venait du Nord, l'autre arrivait du Sud" : là est la solution. Les deux adversaires viennent d'univers opposés. Le village indien où ils arrivent se trouve donc à l'intersection, imaginaire, de ces deux mondes ...

Benoît Rittaud

Source : Les Oiseaux de Feu et autres contes Peaux-Rouges, *par William Camus, dans la collection Folio.*

PARADOXES

Le paradoxe dont traite cet article est ce que l'on appelle un paradoxe faible. C'est un paradoxe qui n'en est pas vraiment un. La question posée aboutit bien à une contradiction logique ; mais l'origine de cette contradiction est en définitive assez facile à retrouver dans les donnés elles-mêmes.
L'impression de paradoxe vient de ce que la contradiction dans les données n'est pas apparente au premier abord.
Il existe des paradoxes logiques beaucoup plus graves, car il est impossible de découvrir la moindre contradiction dans les données. Ils ont conduit les logiciens à une réflexion très poussée sur leur discipline. Nous aurons certainement l'occasion d'en reparler.

D.T.

DE L'ÉPINE A LA ROSE

Lorsqu'au CM2 les élèves apprennent à additionner les fractions, il y a toujours un cancre pour écrire :

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{3+5}=\frac{3}{8}$$

C'est simple... mais faux ! Tangente vous explique aujourd'hui comment un cancre peut avoir du génie...

CHACUN sait bien que $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$, ça ne fait pas $\frac{3}{8}$.

Mais, à partir de $\frac{1}{3}$ et de $\frac{2}{5}$, si on ajoute les numérateurs d'un côté et les dénominateurs de l'autre, on obtient $\frac{3}{8}$.

Autrement dit, si on "marie" $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$, ils font un "petit" : $\frac{3}{8}$.

Pour la génération suivante, on marie $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{8}$, et aussi $\frac{3}{8}$ et $\frac{2}{5}$:

$\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{8}$ donnent $\frac{4}{11}$;

$\frac{3}{8}$ et $\frac{2}{5}$ donnent $\frac{5}{13}$.

En continuant de génération en génération, on obtient :

	$\frac{1}{3}$								$\frac{2}{5}$
1e génération	$\frac{1}{3}$				$\frac{3}{8}$				$\frac{2}{5}$
2e génération	$\frac{1}{3}$		$\frac{4}{11}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{5}{13}$		$\frac{2}{5}$
3e génération	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{7}{19}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{5}$
valeur décimale approchée	0,333	0,357	0,364	0,368	0,375	0,381	0,385	0,389	0,400

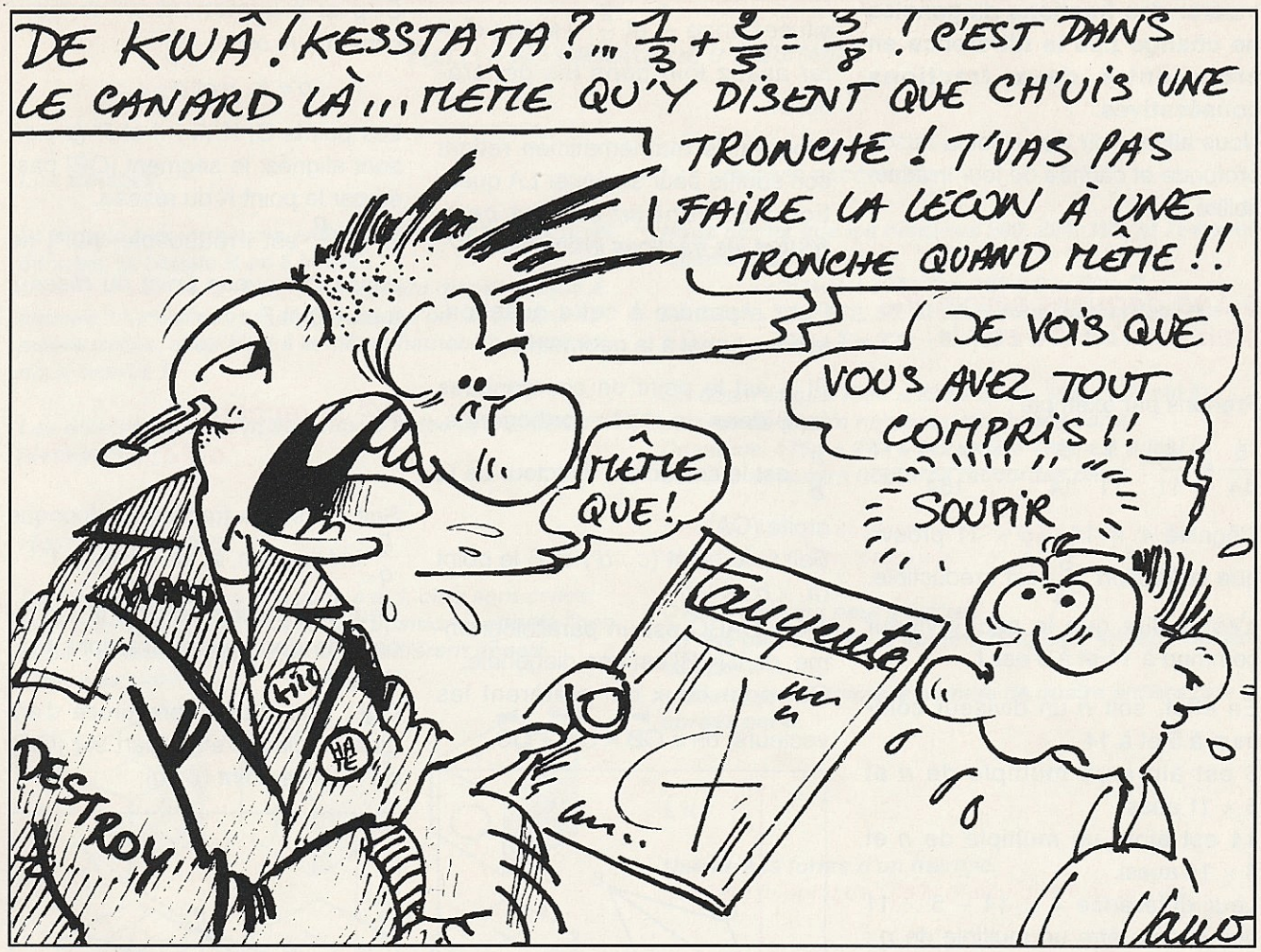
Première constatation : en plaçant à chaque fois le "rejeton" entre ses "parents", les fractions s'ordonnent naturellement, de la plus petite à la plus grande.

Seconde constatation : toutes les fractions obtenues sont irréductibles.

Etonnant, non ?
C'est le moment où le mathématicien commence à saliver d'excitation, à la perspective d'une petite recherche...
...et il n'a pas fini d'être étonné !

Le mécanisme est simple : à partir des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on obtient la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

Pour en parler plus facilement, baptisons $\frac{a+c}{b+d}$ la "diagonale" de



$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

Comparons la diagonale avec ses "parents" : supposons, pour fixer les idées, que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ c'est à dire que $ad - bc > 0$.

(a, b, c et d sont des entiers "naturels", c'est à dire positifs).

Il est alors facile de vérifier que :

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$$

Autrement dit, la diagonale fournit une valeur intermédiaire entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

Pour ceux qui ne sont convaincus que par une démonstration compliquée, je signale que la diagonale est la moyenne de $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, pondérée par les dénominateurs b et d :

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b\left(\frac{a}{b}\right) + d\left(\frac{c}{d}\right)}{b+d}$$

ce qui prouve qu'elle est située entre les fractions initiales.

Classement automatique

De génération en génération, les diagonales se placent donc naturellement entre leurs "parents" : on arrive ainsi à un classement "automatique" des fractions obtenues

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{14} < \frac{4}{11} < \frac{7}{19} < \frac{3}{8}$$

$$< \frac{8}{21} < \frac{5}{13} < \frac{7}{18} < \frac{2}{5}.$$

Calculons les différences entre deux fractions consécutives; on obtient, après réduction au même dénominateur :

$$\frac{1}{42}, \frac{1}{154}, \frac{1}{209}, \frac{1}{152},$$

$$\frac{1}{168}, \frac{1}{273}, \frac{1}{234}, \frac{1}{90}.$$

Tous les numérateurs valent 1 : étonnant, non ?

Or le numérateur de la différence $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ est la "différence en croix" $ad - bc$; cette différence en croix vaut donc 1 pour deux fractions consécutives d'une même génération.

C'était vrai au départ, avec $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{3}$ car $2 \times 3 - 5 \times 1 = 1$

Pourquoi est-ce que ça continue ? partons de $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ dont la différence en croix vaut $ad - bc$, et calculons la différence en croix entre $\frac{a}{b}$ et la diagonale $\frac{a+c}{b+d}$:

$$a(b+d) - b(a+c) = ab + ad - ab - bc$$
$$= ad - bc.$$

Elle n'a pas changé ! Si elle valait 1 au départ, cela continue.

Et de façon analogue entre $\frac{a+c}{b+d}$ et $\frac{c}{d}$:

$$(a+c)d - (b+d)c = ad + cd - bc - cd$$
$$= ad - bc.$$

Insérer des fractions diagonales ne change pas la différence en croix entre deux fractions consécutives.
Nous allons voir que c'est la raison profonde et cachée de leur irréductibilité.

■ *Les derniers seront les premiers ... entre eux !*

Prenons par exemple :

$\frac{5}{14}$ et $\frac{4}{11}$: $\frac{4}{11} - \frac{5}{14} = \frac{4\times14-5\times11}{154}$

L'égalité $4 \times 14 - 5 \times 11$ prouve que la fraction $\frac{5}{14}$ est irréductible, c'est à dire que le seul diviseur commun à 14 et à 5 est 1 :

En effet, soit n un diviseur commun à 5 et à 14 :
5 est alors un multiple de n et 5×11 aussi.
14 est alors un multiple de n et 4×14 aussi.
Leur différence $4 \times 14 - 5 \times 11$ doit encore être un multiple de n : or cette différence vaut 1, qui n'est multiple que de lui-même.
Moralité : $n = 1$.

Cette propriété se généralise sous le nom de **Théorème de Bezout** :

Deux entiers a et b étant donnés, si on peut trouver deux entiers c et d tels que ad – bc = 1, alors a et b sont "premiers entre eux" c'est à dire n'admettent pas d'autre diviseur commun que 1.

Remarquons que les couples *(a,b)* et *(c,d)* ont un rôle symétrique :
$4 \times 14 - 5 \times 11 = 1$ prouve que $\frac{5}{14}$ est irréductible ainsi que $\frac{4}{11}$.

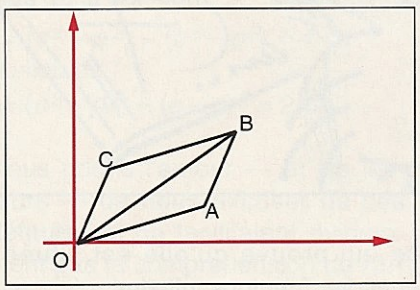
Donc, dès que deux fractions ont une différence en croix égale à 1, chacune est irréductible : toutes nos fractions diagonales sont irréductibles.

A partir de $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$, on va donc pouvoir obtenir autant de fractions irréductibles qu'on veut, toutes situées entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$: il suffira d'aller assez loin dans les générations.

Alors là, le mathématicien retient son souffle pour se poser LA question : *Obtient-on comme cela* ***toutes*** *les fractions irréductibles ?*

Pour répondre à cette question, faisons appel à la géométrie :

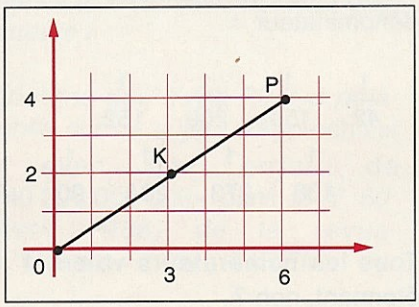
Si A est le point de coordonnées *(a;b)* dans un repère orthonormé, $\frac{a}{b}$ est le coefficient directeur de la droite (OA).
Soit C le point $(c\ ;\ d)$ et B le point $(a + b\ ;\ c + d)$.
Alors OABC est un parallèlogramme, dont [OB] est une diagonale.
Ou, pour ceux qui préfèrent les vecteurs, on a $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.



Donc $\frac{a+c}{b+d}$ est le coefficient directeur de la diagonale [OB] du parallèlogramme construit sur [OA] et [OC] : d'où le nom de "diagonale" donné au début de cet article.

Cela explique que la fraction diagonale est intermédiaire entre les deux fractions initiales.

Alors, comment "voir" qu'une fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible ? C'est simple : les points à coordonnées entières forment un réseau - les noeuds du quadrillage .



Si p et q admettent un diviseur commun n, on a :

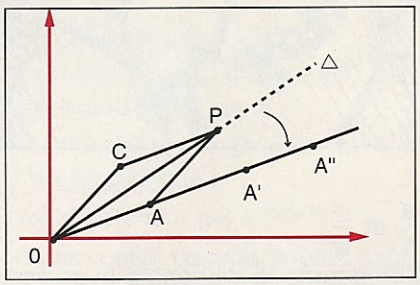
$$p = k\ .\ n \text{ et } q = l\ .\ n$$

Les points O, K *(k ; l)* et P *(p ; q)* sont alignés: le segment [OP] passe par le point K du réseau.
Et si $\frac{p}{q}$ est irréductible, [OP] ne passe par aucun point du réseau, à part O et P.

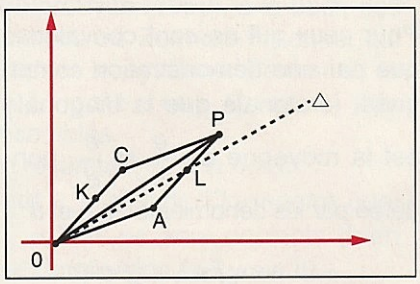
■ *A la recherche d'Adam et Eve*

Soit alors une fraction quelconque $\frac{p}{q}$, irréductible, et inférieure à 1.

Peut-on l'obtenir comme la diagonale de deux autres fractions irréductibles?
Oui : Soit D une demi-droite d'origine O, placée au départ sur [OP], où P est le point *(p ; q)*.



Faisons pivoter D autour de O, dans le sens des coefficients directeurs décroissants, jusqu'à ce que D passe par un point du réseau. D arrivera en même temps sur plusieurs points A, A', A"...
Choisissons le plus proche de O : il correspondra à une fraction irréductible. Appelons-le A et *(a,b)* ses coordonnées. Construisons le parallèlogramme OAPC : C a pour coordonnées $(p - a\ ;\ q - b)$.



Alors $\frac{p}{q}$ sera la fraction diagonale

issue de $\frac{a}{b}$ et $\frac{p-a}{q-b}$.

$\frac{a}{b}$ est irréductible, par construction. $\frac{p-a}{q-b}$ aussi : si ce n'était pas le cas, [OC] passerait par un point K du réseau, et [AP], par translation, par un point L du réseau. Mais alors, en pivotant depuis sa position initiale [OP], D aurait dû passer par K avant de rencontrer A : A ne serait pas le premier point rencontré : contradiction !

Moralité : toute fraction irréductible est la diagonale de deux fractions irréductibles; lesquelles sont chacune la diagonale de deux fractions irréductibles; lesquelles sont chacune... etc.

On remonte ainsi de génération en génération jusqu'à Adam et Ève ... Les numérateurs décroissent strictement à chaque génération : tôt ou tard, ils arrivent à zéro.

Adam, c'est la fraction $\frac{0}{1}$.

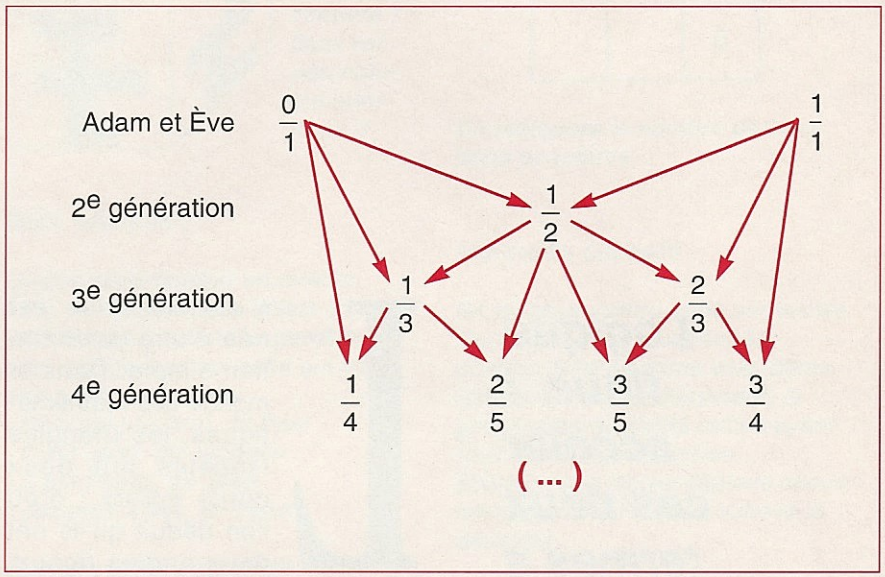
Quand à Ève, c'est la fraction $\frac{1}{1}$, dont la différence en croix avec Adam vaut bien d.

À partir d'Adam et Eve, on obtient toutes les fractions irréductibles grâce à la "règle du cancre" (voir ci-dessous).

Dernière constatation : les dénominateurs augmentant d'au moins une unité à chaque étape, on est sûr, à la n ième génération, d'avoir obtenu toutes les fractions irréductibles de dénominateur n.

"$\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$ font $\frac{3}{8}$" : une phrase que le génie du mathématicien transforme en un buisson de roses, mais qui restera, pour le cancre, un buisson d'épines ...

Jacques Lubczanski



JUNIOR !

CONGRÈS MATHÉMATIQUE

Les maths, ça peut être beau ?

Les maths qu'on fait à l'école, ça peut intéresser un chercheur ?

A l'école, on peut découvrir des maths qui sont importantes dans la recherche d'aujourd'hui ?

Un élève moyen, ça peut discuter maths avec un mathématicien professionnel ?

La recherche en Maths, on peut comprendre à quoi ça sert ?

Si vous avez répondu OUI ! aux cinq questions ,

VOUS DEVEZ PARTICIPER AU CONGRÈS JUNIOR !

De nombreuses classes ou clubs ont répondu à l'appel (voir Tangente 24 page 8) : 200 jeunes vont exposer, les 6 et 7 Juillet, les résultats de leurs découvertes, menées durant l'année scolaire avec leurs enseignants et des chercheurs professionnels.

Si vous avez laissé passer la date limite du 15 Janvier, mais que vous avez déjà engagé des travaux, il est peut-être encore possible de participer à l'opération : contactez M. Enjalbert, Lycée Fustel de Coulanges, 9 rue des Migneaux - 91300 MASSY.

Pour tous les autres, rendez-vous à La Villette les 6, 7 et 8 juillet !

QUAND LA LOGIQUE DEVIENT FLOUE

Logique floue : accoler ces deux termes a un parfum de paradoxe. La logique n'est-ce pas la rigueur, la précision poussées à l'extrême, le contraire exactement du flou ? Et pourtant, la logique floue existe. Et ses applications pratiques se multiplient.

LA LOGIQUE floue est née d'une constatation simple. Dans le monde des mathématiques, les triangles isocèles ont deux côtés égaux ; d'où l'on déduit qu'ils ont deux angles égaux. Dans le monde réel, les situations ne sont pas si tranchées. "Il fait trop chaud, il faut éteindre le chauffage." Phrase banale. Mais à partir de quand fait-il trop chaud ? C'est bien difficile à préciser. Pourtant, si on veut confier à un ordinateur ménager la fonction de couper le chauffage, il faudra fixer une limite précise.

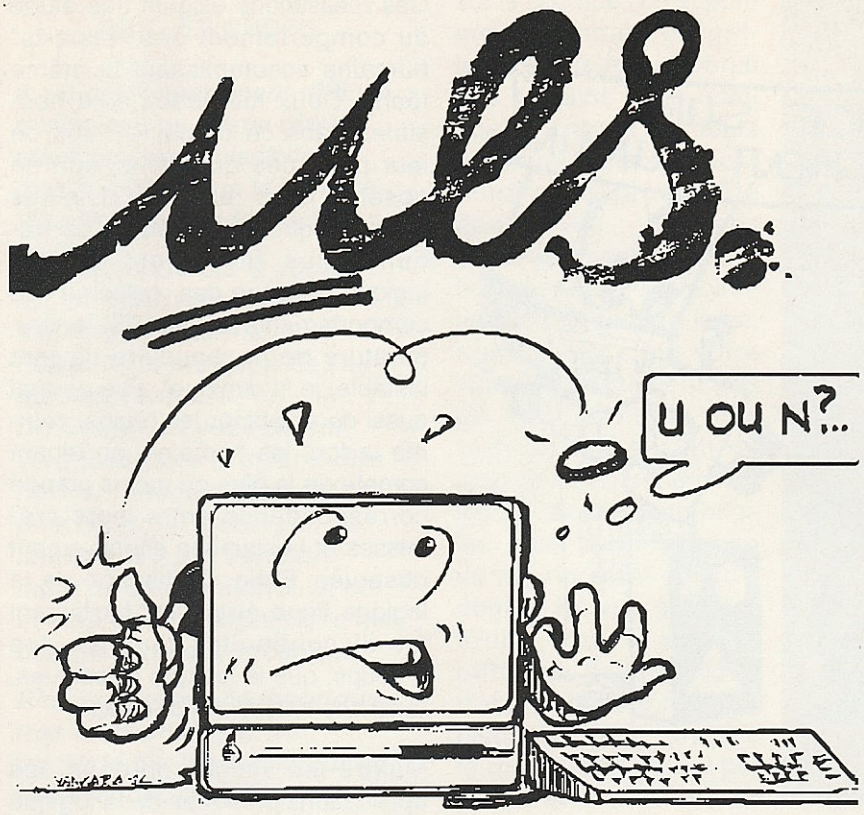
Même chose quand pour la lecture d'un texte manuscrit. "Cette lettre ressemble à un n." Mais est-ce vraiment un n ? Le lecteur humain décidera en fonction du contexte. S'il n'y arrive pas, il examinera les n non ambigus qui figurent dans le texte. Mais les éléments dont il disposera seront incertains, approximatifs. Malgré tout, il se trompera rarement. Alors qu'il a été jusqu'à présent impossible de programmer un ordinateur pour qu'il résolve de manière efficace un tel problème de reconnaissance des formes. Il est très difficile de lui faire prendre en compte des éléments approximatifs, dans la mesure où la programmation classique relève de la logique la plus rigoureuse.

■ N ou U ?

C'est en réfléchissant à ces problèmes que le mathématicien américain Lofti Zadeh a eu, dans les années soixante, l'idée de la logique floue. Il s'est rendu compte que, dans la réalité, on passait progressivement, et non pas brutalement, du chaud au froid ou de la forme "n" à la forme "u" dans les caractères écrits à la main. Pour traduire ce passage progressif, il a introduit la notion de sous-ensemble flou. De quoi s'agit-il ?

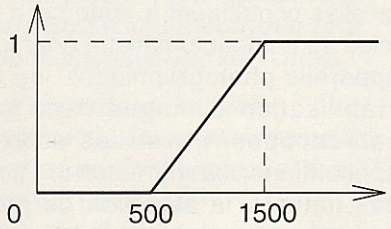
Un sous-ensemble est une partie d'un ensemble. Par exemple, les nombres entiers supérieurs à 1000 forment un sous-ensemble de l'ensemble des entiers (les entiers "grands"). A un sous-ensemble est associée une fonction caractéristique. Cette fonction associe, à tous les éléments de l'ensemble, un nombre qui est 0 ou 1 : 1 pour les éléments du sous-ensemble, 0 pour les autres. La fonction caractéristique de notre sous-ensemble des entiers supérieurs à 1000 est donc la fonction f telle que :

f(n) = 0 si n est inférieur ou égal à 1000,
f(n) = 1 si n est supérieur à 1000.



Pour définir les sous-ensembles flous, il suffit d'admettre que la fonction caractéristique peut prendre des valeurs comprises entre 0 et 1 ! La transition entre les entiers "grands" et les autres n'est plus brutale, elle devient progressive. On peut par exemple prendre pour fonction caractéristique :

f(n) = 0 si n est inférieur ou égal à 500
f(n) = (n - 500) / 3 si n est compris entre 500 et 1500
f(n) = 1 si n est supérieur ou égal à 1500.



En termes plus directs, les nombres supérieurs à 1500 sont sans conteste grands, les nombres inférieurs à 500 ne le sont pas, et les nombres compris entre 500 et 1500 le sont dans une certaine mesure ; et ils le sont d'autant plus qu'ils sont plus proches de 1500. Mais, bien évidemment, rien n'oblige à prendre cette forme pour la fonction caractéristique, ni, dans notre exemple, à retenir les bornes choisies. Il faut adapter la fonction au problème traité.

■ *Inclusion floue*

Les fonctions caractéristiques permettent d'étendre aux sous-ensembles flous les opérations qui portent sur les sous-ensembles ordinaires.

Considérons par exemple l'inclusion. En théorie des ensembles, on la définit ainsi : étant donné un ensemble E, et deux sous-ensembles A et B de E, A est inclus dans B si tous les éléments de A appartiennent à B. Comment traduire cette définition en utilisant les fonctions caractéristiques f_A et f_B de A et de B ?

Si x appartient à A, $f_A(x)$ est égal à 1 ; mais x appartient alors à B, et $f_B(x)$ est aussi égal à 1. Si x n'appartient pas à A, $f_A(x)$ est égal à 0 ; dans ce cas, x peut ou non appartenir à B, et $f_B(x)$ peut être égale à 0 ou à 1.

Une manière de résumer ces propriétés est de dire si A est inclus dans B, $f_A(x)$ est inférieur ou égal à $f_B(x)$ pour tout x appartenant à E. Il est facile de vérifier que la réciproque est vraie. Or cette relation se transpose sans problème si les fonctions caractéristiques prennent d'autres valeurs que 0 et 1. C'est celle qui est prise comme définition de l'inclusion dans le cas des sous-ensembles flous.

Passons maintenant à l'intersection. L'intersection de deux sous-ensembles ordinaires A et B est le sous-ensemble C formé par les éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B. En termes de fonctions caractéristiques, on vérifie aisément que cette propriété est équivalente à :

$$f_C(x) = \min(f_A(x), f_B(x)),$$

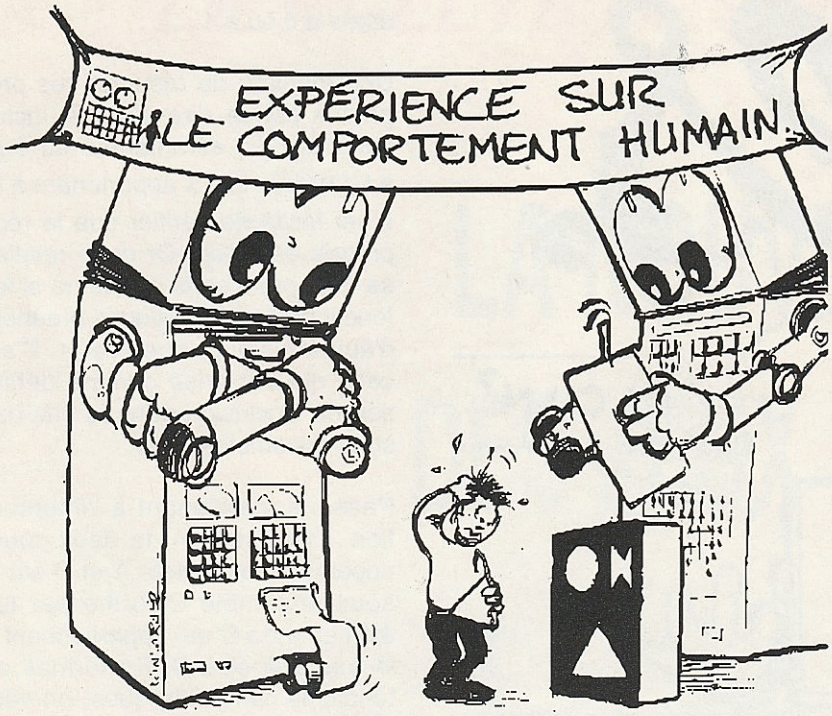
relation qui est prise là encore comme définition pour l'intersection des sous-ensembles flous.

On peut transposer tout aussi aisément les autres définitions de la théorie des ensembles ordinaires aux sous-ensembles flous (notez que l'on ne parle pas d'"ensembles flous" : l'ensemble principal lui n'est pas flou).

La vérité d'une proposition s'exprime en logique ordinaire par l'appartenance à un ensemble : "Il fait trop chaud dans cet appartement" par "t (la température) supérieure à 16°" (Vous êtes libre de préférer une borne un peu plus élevée). En logique floue, une proposition peut-être certainement vraie, certainement fausse, ou vraie dans une certaine mesure, selon la valeur de la fonction caractéristique correspondante.

Quant aux règles de la logique formelle (Tangente numéros 9 et 10), elles s'expriment aisément en termes ensemblistes. Là aussi, il n'y a qu'à faire la transposition pour arriver à la logique floue.

La boucle est bouclée, l'instrument



est prêt à servir. Et, pendant quelque temps, il va effectivement beaucoup servir.

Engouement

A la fin des années soixante-dix, la logique floue va bénéficier d'un engouement certain chez les mathématiciens. Engouement facile à mesurer : dans les publications spécialisées, les articles sur ce sujet se comptent par centaines.

L'espoir est grand que cette nouvelle logique apporte la solution à des problèmes qui résistent aux méthodes traditionnelles : comment l'homme reconnaît-il les formes, comment distingue-t-il un "n" d'un "u" ? Pourquoi les ordinateurs n'arrivent-ils pas à traduire correctement d'une langue dans l'autre ? Comment faciliter le dialogue entre l'homme et la machine ?

Ces questions intéressent les praticiens, qui ont pour objectif de confier à des ordinateurs un nombre croissant de tâches humaines ; mais elles intéressent aussi les théoriciens, qui cherchent à mieux comprendre comment fonctionne le cerveau humain, comment il parvient à traiter des données approximatives et incomplètes.

La logique formelle donne aussi la possibilité d'interpoler entre deux situations limites précises. Elle donne enfin le moyen de prendre en compte des règles incluant une certaine gradualité. Pour prendre cette fois un exemple dans le domaine médical : "Plus le patient est jeune, et plus son taux de cholestérol est élevé, plus il faudra envisager un traitement sérieux".

Déception

Malheureusement, la déception allait être à la hauteur des espoirs. Les multiples travaux ne débouchèrent sur aucune percée spectaculaire. Aussi, au bout de quelques années, la mode de la logique floue passa, et les chercheurs qui s'étaient lancés dans cette voie se tournèrent vers d'autres sujets.

Pourtant, la logique floue avait fait ses preuves dans un domaine, celui justement pour lequel elle était née : le contrôle des processus industriels. Le premier essai concluant date de 1974 ; il portait sur le contrôle d'une chaudière à vapeur. Il fut suivi par d'autres réalisations du même genre.

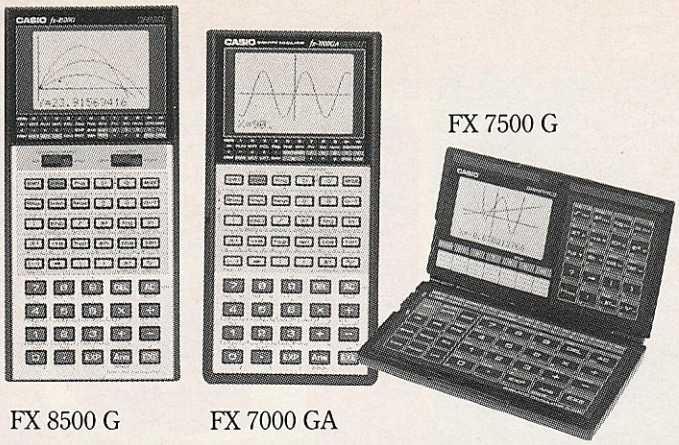
Ces réalisations exigent une étude du comportement des "experts" humains accomplissant la même tâche. Deux méthodes sont possibles dans ce domaine : soit on leur pose des questions, soit on observe leurs réactions. L'usage de la logique floue permet de traduire plus facilement que la logique ordinaire des règles ou des comportements du type "Si la température de la chaudière devient instable, je la diminue". Elle permet aussi de combiner les règles, comme le font les humains, en tenant compte de la plus ou moins grande correspondance entre leurs prémisses et la situation effectivement observée. Enfin, l'utilisation de la logique floue évite plus facilement les discontinuités brutales, les à-coups, que la logique classiques, avec ses transitions brutales.

Malgré les succès obtenus, les applications pratiques de la logique floue sont tombées dans le même oubli que le reste. Seules quelques équipes ne renonçaient pas, malgré leur isolement.

Telle était du moins la situation en Occident. Car, en 1980, les Japonais reprennent le flambeau. Comme il est de tradition dans ce pays, universitaires et industriels travaillent de conserve. La première application opérationnelle débouche en 1986, pour la conduite d'un système de transport ferroviaire. Depuis les applications se comptent par centaines.

Certaines concernent des domaines où les Japonais disposent déjà d'un avantage compétitif, qu'elles contribuent à renforcer : la mise au point automatique pour les appareils photographiques, ou la stabilisation d'images dans les caméscopes. Parmi les autres applications, citons la ventilation des tunnels, la sélection de programmes de machines à laver, le contrôle de la cuisson dans les fours à micro-ondes. On le voit, dans l'Empire du Soleil Levant, les mathématiques sont descendues jusque chez les ménagères !

Daniel Temam



NOUVEAU
FX 7700 G

LES GRAPHIQUES CASIO, 6 ANS D'AVANCE

1985 : LA PREMIERE "GRAPHIQUE", SIGNEE CASIO.
. 6 ANS DE MAÎTRISE DE LA TECHNOLOGIE DES "GRAPHIQUES" ET LE DEVELOPPEMENT D'UNE GAMME PERFORMANTE.
. 6 ANS D'EXPERIENCE A TRAVERS LES 700.000 UTILISATEURS FRANÇAIS DE "GRAPHIQUES" CASIO, PROFESSEURS ET ELEVES.

1991 : 4 MODELES COMPLEMENTAIRES POUR TOUS LES NIVEAUX SCOLAIRES ET TOUS LES BUDGETS :
FX 7000 GA: LA PREMIERE GRAPHIQUE
FX 7500 G: LA GRAPHIQUE DE POCHE
FX 8500 G: LA GRAPHIQUE A FICHIERS

ET LA NOUVELLE GRAPHIQUE HIGH TECH FX 7700G.

CASIO®

CALCULATRICES
HAUTE TECHNOLOGIE

3615 CLUB CASIO

FX 7700G
. ANALYSEUR DE FONCTIONS
. TRACEUR DE COURBES
. ZOOM. PROGRAMMATION: 4164 OCTETS. BASE DE DONNEE DE FONCTIONS. 315 FONCTIONS
. STATISTIQUES. MATRICES (9 x 9)
. CALCUL EN BASE N. CALCUL, TRACES D'INTEGRALE. MENUS ARBORESCENTS
. PROTECTION PAR ETUI COULISSANT.

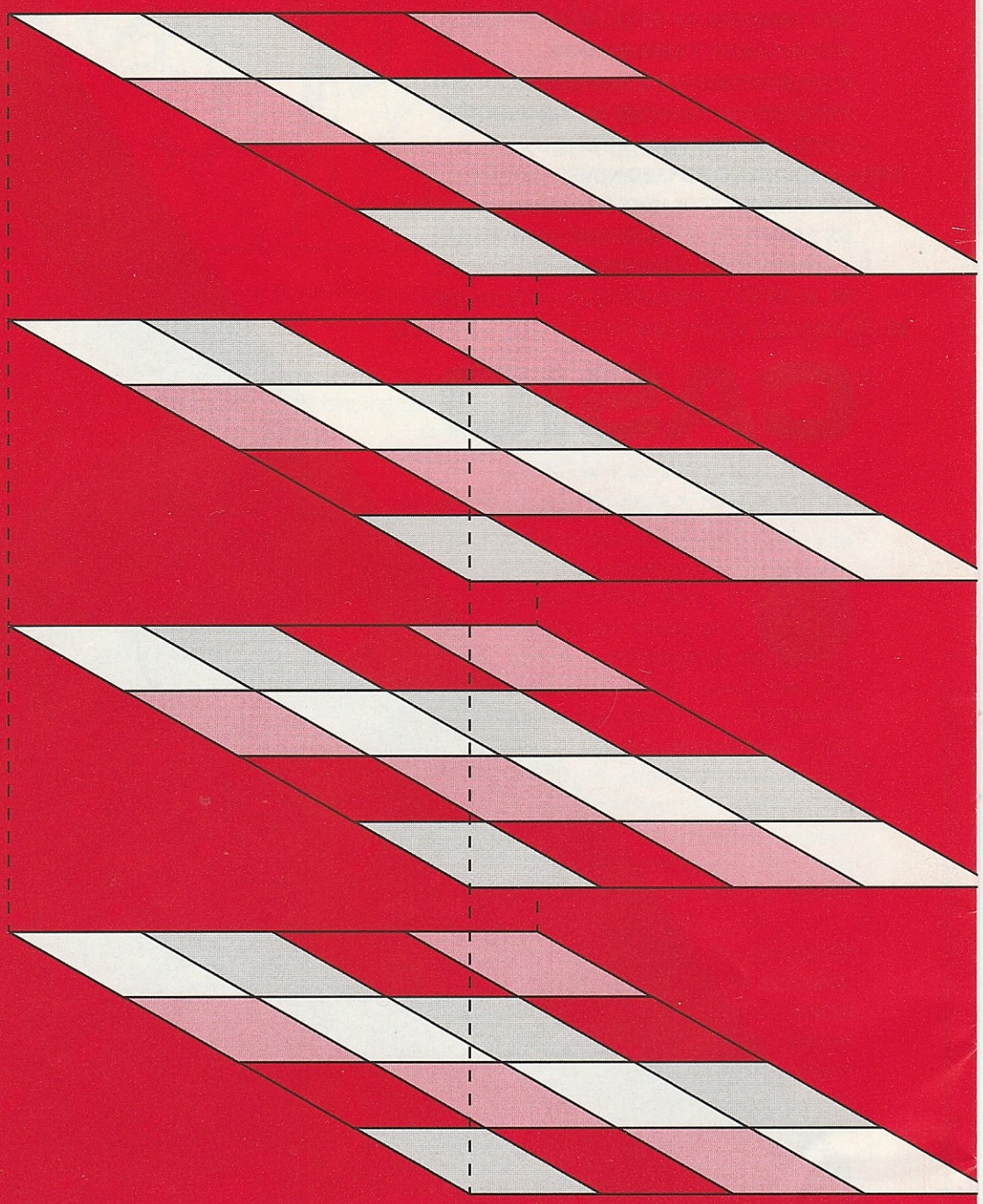
AGENT EXCLUSIF: NOBLET S.A. COLOMBES. VENTE EN PAPETERIES ET MAGASINS SPECIALISES.

JE

Les mots composant cette grille se lisent dans les trois dimensions : horizontalement, obliquement sur le même plan, et verticalement. La couleur des cases est conçue pour vous faciliter la lecture verticale.
Les 48 mots vous sont proposés par ordre alphabétique.

Replacez-les sur la grille !

ADAM	ISAR
ALEP	LALO
ALES	LIDO
AMIN	LILI
AMON	LINO
AMOR	MELA
ANET	MIDI
AVAL	MODE
AVEN	NEMO
DOLE	NOCE
ECOT	ODIN
EDIT	OTAN
EDOM	PINS
ELUE	RAGE
EMIS	RAMI
ENEE	RARE
EPAR	RELU
ERES	RODE
ESTE	ROSE
ETOC	ROTS
ETON	SEME
GALE	SENE
GELA	UNES
INES	VITE



UX ET PROBLEMES

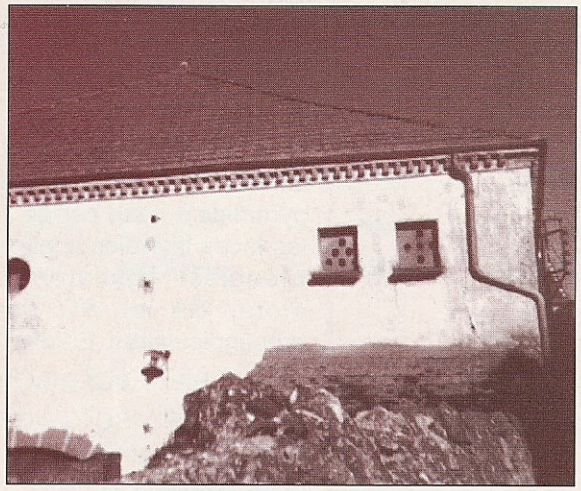
GRILLE SPATIALE

Par Jacque Lerville

PHOTOMATHONS :

OU SE NICHENT LES MATHÉMATIQUES ?
à l'entrée du pigeonnier.

Qui disait que faire des mathématiques ouvre une nouvelle fenêtre sur le monde ?



Cette photo a été prise par André Henneton à Sauvagnat Ste Marthe (63500).
Envoyez-nous vos plus belles photos à thème mathématique (sur papier, de préférence noir et blanc). Les auteurs des photos publiées recevront un cadeau.

GAGNEZ

Le coin du matheux littéraire

Le premier lecteur qui nous enverra le nom de l'auteur de cette citation, ainsi que celui de l'œuvre dont elle est tirée, ***gagnera un jeu "Mathable".***

« Commençons par un petit paradoxe.
Des êtres dont l'esprit serait fait comme le nôtre et qui auraient les mêmes sens que nous, mais qui n'auraient reçu aucune éducation préalable, pourraient recevoir d'un monde extérieur convenablement choisi des impressions telles qu'ils seraient amenés à construire une géométrie autre que celle d'Euclide et à localiser les phénomènes de ce monde extérieur dans un espace non euclidien ou même dans un espace à quatre dimensions.
Pour nous dont l'éducation a été faite par notre monde actuel, si nous étions brusquement transportés dans ce monde nouveau, nous n'aurions pas de difficulté à en rapporter les phénomènes à notre espace euclidien. Inversement, si ces êtres étaient transportés chez nous, il seraient amenés à rapporter nos phénomènes à l'espace non euclidien.
Que dis-je ; avec un peu d'efforts nous pourrions le faire également. Quelqu'un qui y consacrerait son existence pourrait peut-être arriver à se représenter la quatrième dimension. »

Un homme, un livre

Cette phrase doit vous faire penser à un homme et un titre de livre. ***Un jeu "Mathable" sera offert*** *au premier d'entre vous qui les découvrira.*

Il s'illustra dans les variétés et occupa une place centrale sur les bords. Sa devise "Prédire n'est pas expliquer" résume assez bien son livre catastrophique.

Niveau avant-bac

Réservé à nos lecteurs de seconde, première et terminale, ce concours nous permet d'attribuer ***une calculatrice HP20S*** *à la plus brillante solution reçue parmi les cinq premières bonnes réponses.*

Dans un quadrilatère convexe la somme des distances de tout point intérieur aux quatre côtés est constante. Montrer que le quadrilatère est un parallélogramme.

Niveau post-bac

Une calculatrice HP20S *sera attribuée à la plus brillante solution reçue parmi les cinq premières bonnes réponses.*

Montrer que pour tous entiers naturels m et n
$(1 - x_1x_2\ldots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m)\ldots(1 - y_n^m) \geqslant 1$
où $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $x_i + y_i = 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

SPOTS sur la Géométrie dans l'espace

"Voir" dans l'espace

La perspective cavalière obéit à des règles simples (tout au moins au début ; pour plus d'informations, voir Tangente 16 p 18) :

- tout ce qui est vu dans un plan parallèle à la feuille de papier est représenté à une échelle donnée,

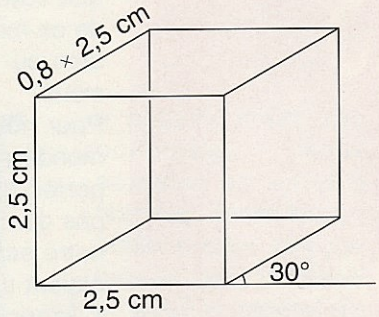
- toutes les droites perpendiculaires à la feuille sont représentées par des parallèles qui font, avec l'horizontale, un angle fixé. Sur ces droites, les dimensions sont réduites, par rapport à l'échelle précédente, dans un rapport donné.

- les segments cachés, lorsqu'ils sont représentés, sont dessinés en pointillés, ou interrompus au passage des objets placés devant eux.

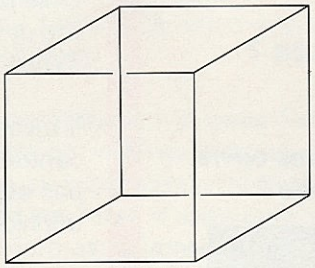
Il en résulte que le parallélisme est respecté, ainsi que les rapports de longueurs suivant une même direction. En particulier, les milieux sont conservés.

Par contre, les angles et les longueurs sont déformés dans les plans qui ne sont pas parallèles à celui de la feuille.

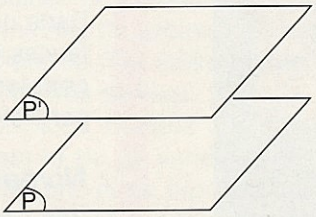
Certaines conventions, sans rapport avec la nature réelle des objets, permettent de mieux saisir la situation. Ainsi, un plan est représenté (arbitrairement) par un parallélogramme ; des plans parallèles sont dessinés sous forme de parallélogrammes à bords parallèles.



Un cube de 10 cm d'arête, représenté dans la perspective d'échelle 1 : 4, d'angle 30° et de rapport 0,7.



Un cube bizarre ...

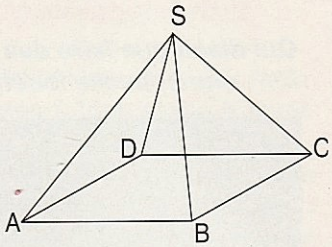


Deux plans parallèles

Le plan est mort, vive le plan !

Comme en géométrie plane, il est important de *démontrer* les résultats à l'aide de calculs ou d'enchaînements de propriétés .

On peut utiliser des propriétés particulières de la géométrie dans l'espace : incidence, droites et plans parallèles et orthogonaux ... (voir page suivante), mais souvent, il suffit de trouver un plan de la figure dans lequel on peut appliquer les règles de la géométrie plane. Le premier travail consiste alors parfois à montrer que les éléments considérés sont effectivement dans un même plan.



Exemple : Dans cette pyramide à base carrée , si les faces latérales sont des triangles équilatéraux, alors, SA et SC sont perpendiculaires. En effet,

on a : $BA^2 + BC^2 = AC^2$,

d'où : $SA^2 + SC^2 = AC^2$.

S, A et B étant coplanaires, nous pouvons appliquer la réciproque du théorème de Pythagore, et le triangle SAC est rectangle en S.

■ Les plans : des êtres nouveaux

Les plans et les droites sont des sous-ensembles de l'espace ; leurs rapports sont définis par des énoncés appelés *axiomes* , qui, en petit nombre, permettent de reconstruire toutes les autres propriétés et théorèmes. Voici par exemple trois axiomes qui concernent les plans :

Par trois points non alignés, il passe un plan et un seul,

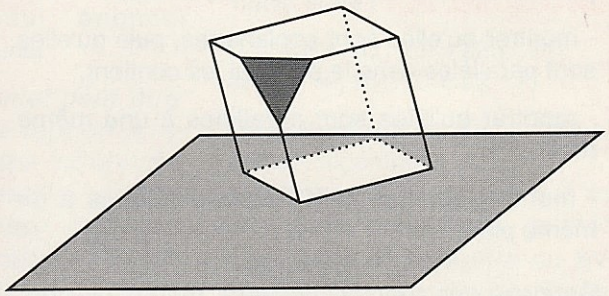
Si A et B sont deux points distincts d'un plan P, alors la droite (AB) est contenue dans le plan P.

Si deux plans ont un point commun, leur intersection est une droite.

Ces affirmations ont l'air d'évidences. Pourtant, on peut imaginer d'autres géométries, tout aussi rigoureuses, fondées sur d'autres systèmes d'axiomes, et capables de décrire des situations tout aussi "réelles", comme la géométrie de la sphère ou l'espace-temps de la relativité générale. (voir Tangente numéros 17 et 18, "Les géomètres malades/guéris du postulat").

■ Des alignements utiles

La clé de certains problèmes de géométrie dans l'espace tient dans de simples propriétés d'alignement.
Exemple : Pour trouver l'intersection de la face ombrée du solide avec le plan, sur lequel il est posé, il suffit de construire, par alignement, deux des points de la droite d'intersection.



Indication : considérer ce qui se passe dans les plans de deux des faces du solide.

(solution page 46)

■ Droites et plans : nouvelle donne

Les droites et les plans vont pouvoir occuper, les uns par rappport aux autres, des positions variées.

Deux droites peuvent encore être sécantes (perpendiculaires ou non), parallèles (confondues ou strictement parallèles). Tous ces cas correspondent à des droites *coplanaires,* c'est-à-dire qu'il existe un plan contenant les deux droites. Mais elles peuvent aussi être *non coplanaires,* c'est-à-dire qu'aucun plan ne les contient toutes deux à la fois. Et deux droites D et D′ peuvent être *orthogonales* sans être perpendiculaires (il suffit que D soit parallèle à une perpendiculaire à D′).

Deux plans peuvent, comme des droites dans le plan, être sécants (perpendiculaires ou non) ou parallèles (strictement ou confondus).

Une droite peut être sécante à **un plan** (perpendiculaire ou non), ou parallèle à celui-ci (strictement, ou incluse dans le plan).

Il en résulte une kyrielle de propriétés, qu'il n'est pas nécessaire d'apprendre en tant que telles, mais qu'il faut savoir tester rapidement sur un dessin, et, si elles semblent vraies, démontrer à partir des quelques propriétés de base. Par exemple :

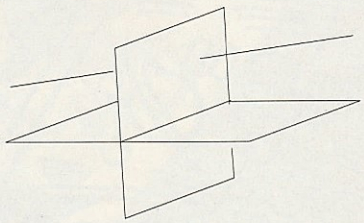
Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Si deux plans sont parallèles à un même troisième, ils sont parallèles entre eux.

Mais attention, on peut aussi en fabriquer de fausses :

Si deux plans P et P′ sont perpendiculaires, alors toute droite parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Dans ce cas, il suffit de trouver *un contre-exemple* pour affirmer que le résultat est faux.



Cette fiche peut être reproduite pour utilisation dans les classes

Tangente, 11bis, rue Henri Wallon - 95100 ARGENTEUIL. 1 an (6 numéros) 152 F

Des méthodes pour démontrer

Pour démontrer dans l'espace, il ne faut pas hésiter à modifier légèrement l'objectif à atteindre en utilisant, au mieux de la situation décrite dans l'énoncé, les multiples propriétés des droites et plans parallèles et perpendiculaires.

Ainsi, **pour montrer que deux droites sont parallèles**, trois moyens s'offrent à nous :

- montrer qu'elles sont coplanaires, puis qu'elles sont parallèles dans le plan qui les contient,

- montrer qu'elles sont parallèles à une même droite,

- montrer qu'elles sont perpendiculaires à un même plan.

Sauriez-vous trouver plusieurs méthodes pour chacun des objectifs suivants :

a) montrer qu'une droite d est parallèle à un plan P,

b) montrer que trois points sont alignés,

c) montrer que deux plans sont parallèles,

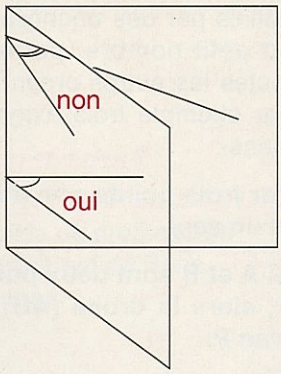
d) montrer que deux plans sont sécants,

e) montrer qu'un plan et une droite sont perpendiculaires...

(Solution page 46).

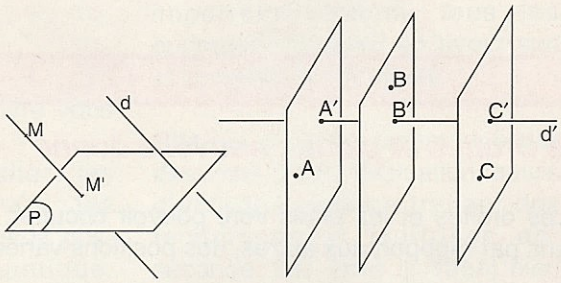
Attention aux angles

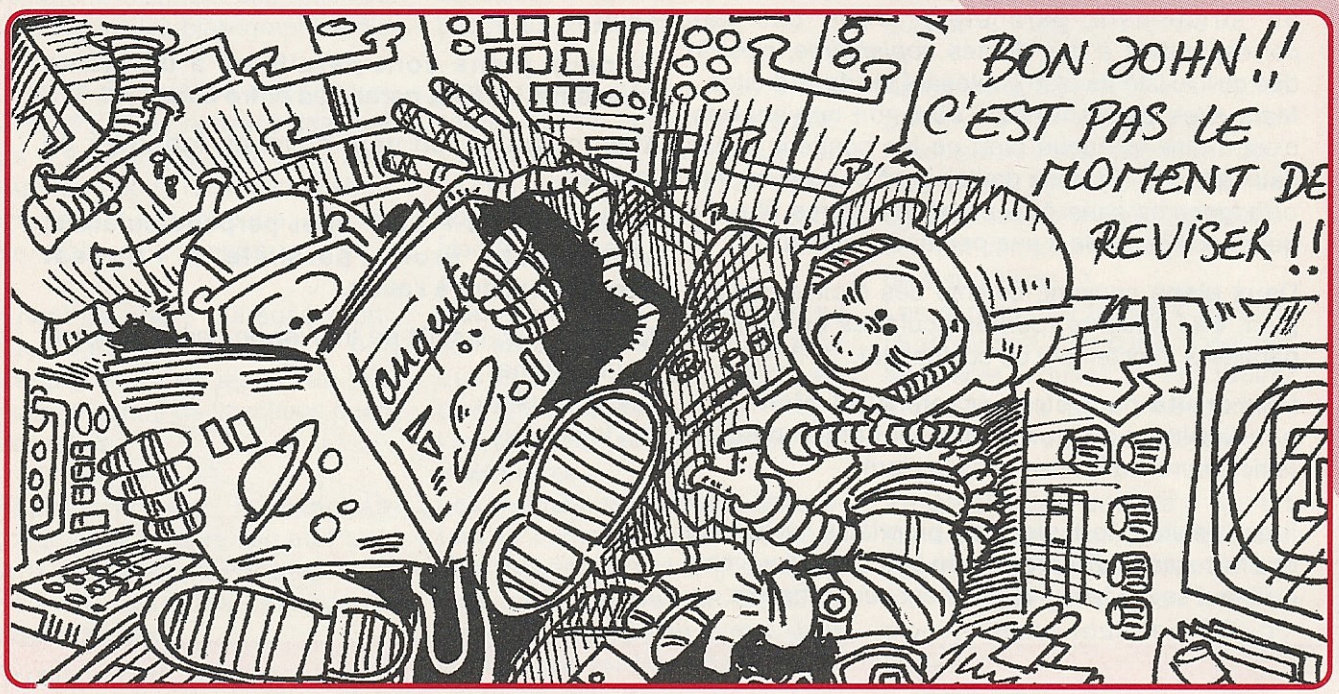
Pour trouver l'angle entre deux droites sécantes, il suffit de le mesurer dans le plan qui les contient. Mais pour mesurer l'angle entre deux plans, il faut se placer dans un plan perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans :



Des projections

On peut opérer des projections dans l'espace, comme dans le plan. Voici une projection sur le plan P parallèlement à la direction de d, et une projection othogonale sur d' :

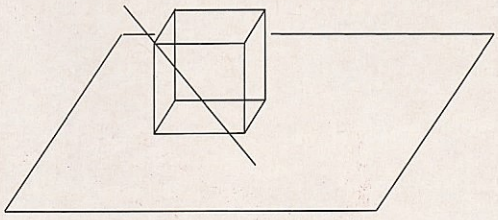




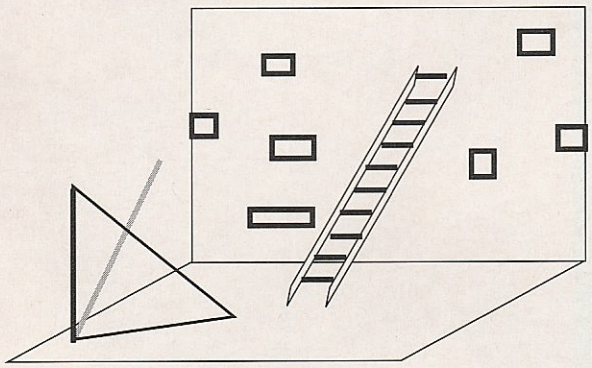
Tangente, 11bis, rue Henri Wallon - 95100 ARGENTEUIL. 1 an (6 numéros) 152 F

■ Marche à l'ombre

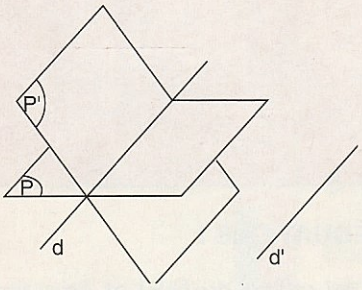
Voici un cube posé sur un plan. la lumière arrive parallèlement suivant la direction indiquée par l'ombre d'un des sommets.
Représenter l'ombre du cube sur ce plan.



Et comment, alors, représenter l'ombre de cette échelle, posée contre un mur, en supposant toujours les rayons lumineux parallèles, et en connaissant l'ombre du bâton vertical ?

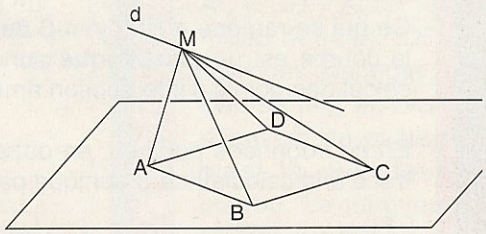


■ Parallèles

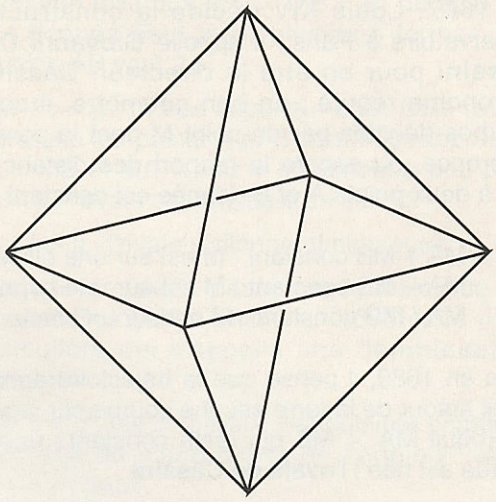


Montrer que si une droite d' est parallèle à deux plans P et P', elle est parallèle à leur intersection.

M est un point extérieur au plan du parallélogramme ABCD. Montrer que les plans ABM et CDM se coupent suivant une parallèle à (AB) et à (CD).



■ L'octaèdre dévoilé



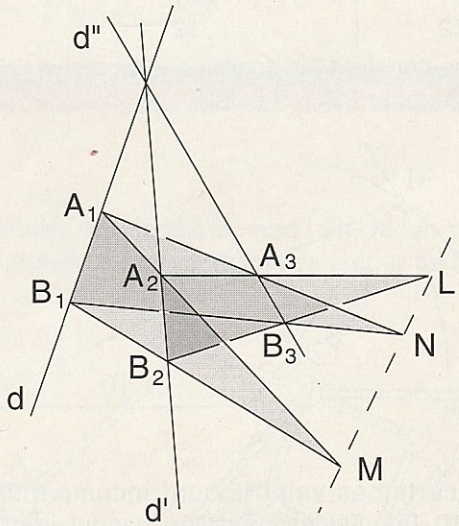
L'octaèdre ci-dessus est formé de huit triangles équilatéraux identiques, de côté 10 cm.

Trouver la hauteur de l'octaèdre, l'angle entre deux faces ayant une arête commune et l'angle entre deux faces sans arête commune, mais ayant un sommet commun.

■ Alignés !

d, d', d" sont trois droites sécantes en O, mais non coplanaires. On considère les points A_1 et B_1 sur d, A_2 et B_2 sur d', A_3 et B_3 sur d", tels que les droites (A_1A_2) et (B_1B_2) soient sécantes en M, (A_1A_3) et (B_1B_3) en N, (A_2A_3) et (B_2B_3) en L.

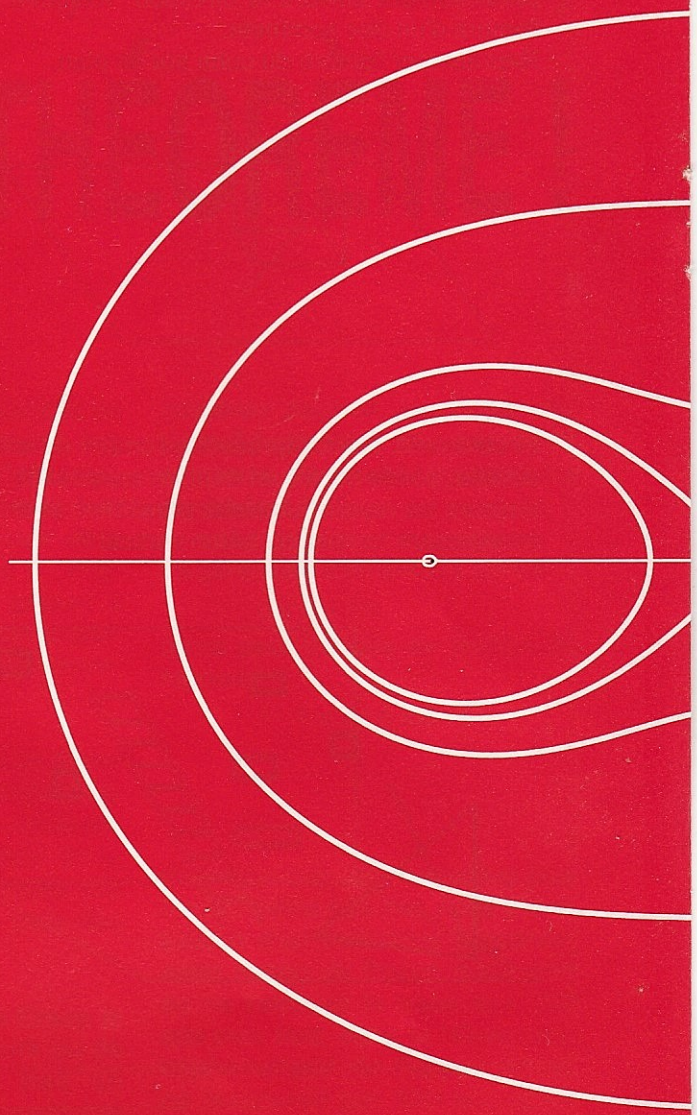
Montrer que L, M, et N sont alignés.



(Solutions page 46)

Cette fiche, peut être reproduite pour utilisation dans les classes
TANGENTE, 11bis, rue Henri Wallon - 95100 ARGENTEUIL.
Abonnement un an (6 numéros), 152 Francs.

OVALES DE CASSINI



LA PLAYMATH

par J. LUBCZANSKI

1 VIVE LE ROI !

En 1667, Louis XIV décide la construction d'un observatoire à Paris ; il appelle **Giovanni Domenico Cassini** pour en être le directeur. Cassini est un astronome réputé ; en bon géomètre, il connaît les courbes décrites par un point M dont la somme ou la différence, ou encore le rapport des distances MA et MB à deux points A et B donnés est constant :

MA + MB constant : M est sur une ellipse ;
MA – MB constant : M est sur une hyperbole ;
MA / MB constant : M est sur un cercle.

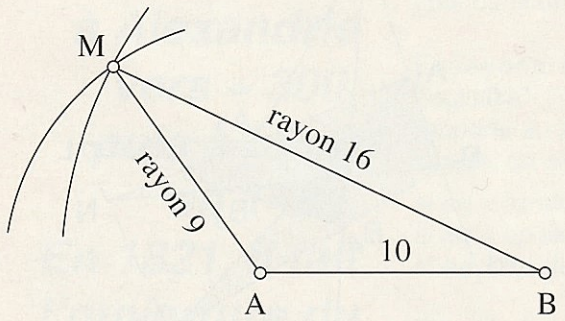
Mais en 1680, il pense que la trajectoire apparente du soleil autour de la terre est une courbe sur laquelle c'est le produit MA × MB qui reste constant ; une nouvelle courbe est née : l'**ovale de Cassini**.

2 VIVE LES CONSTRUCTIONS ! ...

Soit à construire, de façon approchée, un ovale de foyers A et B distants de 10 cm, qui soit l'ensemble des points M tels que MA × MB = 144 cm ^{2}.
On dresse un tableau de valeurs :

MA	MB = 144 / MA
1	144
2	72
3	48
4	36
5	28.8
6	24
7	20.6
8	18
9	16
10	14.4
11	13.1
12	12

Puis on construit les positions successives de M : par exemple pour MA = 9 et MB = 16 :



Mais certaines valeurs sont incompatibles avec AB = 10. En effet les inégalités triangulaires

$$MA - MB \leqslant AB \leqslant MA + MB$$

conduisent à des bornes pour MA : ici on trouve MA compris entre 8 et 18 (et aussi MB, par symétrie).

4 VIVE LES ÉQUATIONS !

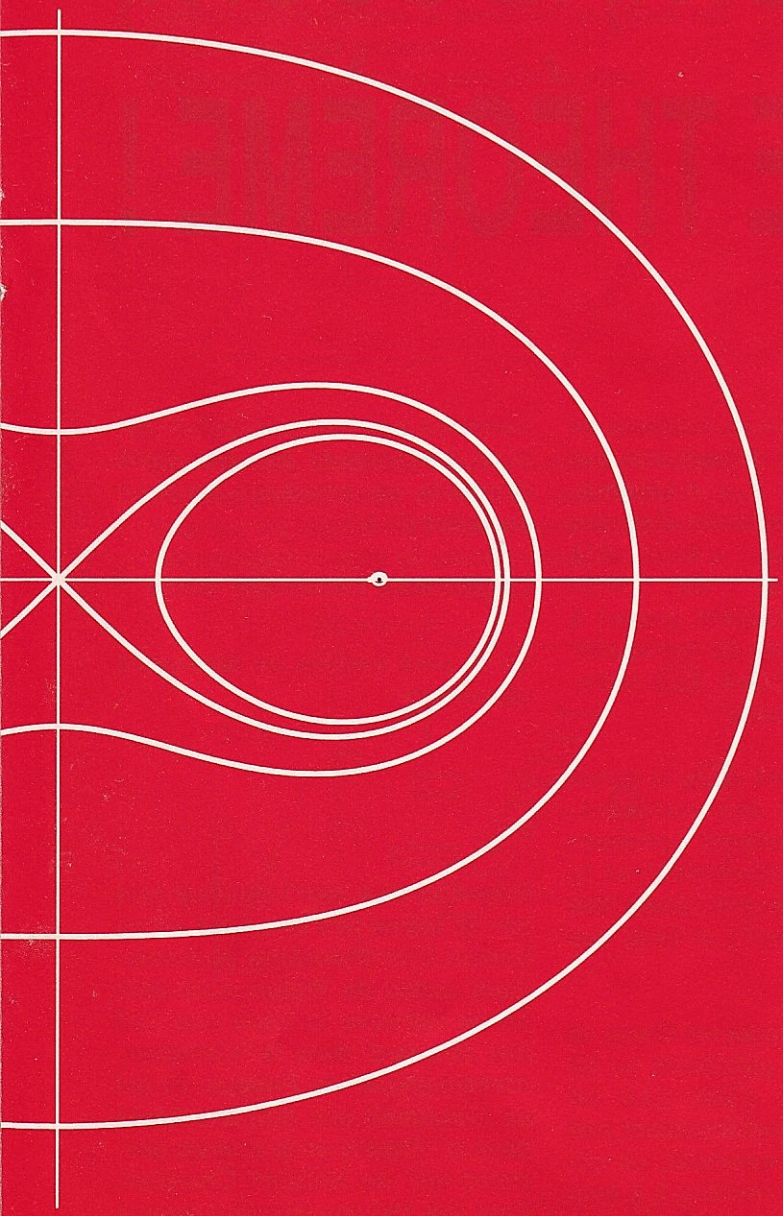
Avec l'origine au milieu de [AB] et en posant AB = 2a
coordonnées (– a, 0) et (a, 0).
Si on pose la constante MA × MB égale à un nombre pos

$$MA \times MB = k^2 \quad \Leftrightarrow \quad MA^2 \times MB^2 = k^4$$
$$\Leftrightarrow \quad [(x-a)^2 + y^2] \times [(x+a)^2$$

Ce qui se ramène à P(x, y) = 0 où P est un polynôme du
la courbe est une **quadrique** : une droite la coupera au
calcul des points d'intersection amène une équation du q

En coordonnées polaires, on obtient $r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta$
tracé à la calculatrice graphique par :

$$r = \sqrt{a^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{k^4 - a^4 \sin^2 2}}$$



4 L'OVALE EST MORT : VIVE L'OVALE !

La courbe telle que MA × MB = k^2 où A, B et k^2 sont donnés peut avoir plusieurs formes. Si la distance AB vaut $2a$:

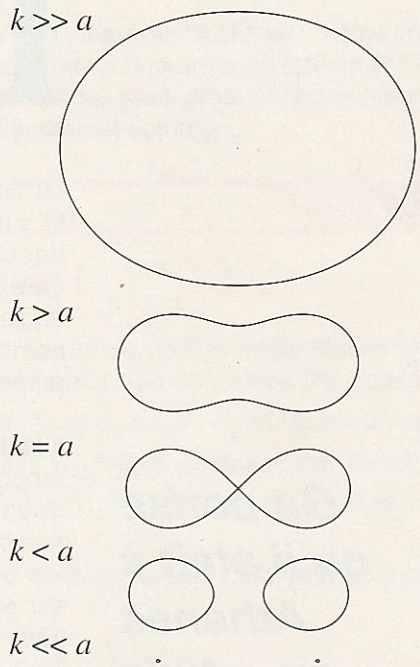
Pour $k >> a$: (k très supérieur à a). Cela reviennt à dire que les points A et B sont très rapprochés : MA = MB et MA × MB = k^2 revient à peu près à MA = k : l'ovale est proche d'un cercle.

Pour $k > a$: l'ovale s'allonge et se creuse.

Pour $k = a$: l'ovale passe par le milieu de [AB]. Jacques Bernoulli a étudié en 1694 cette courbe particulière qui s'appelle une "**lemniscate de Bernoulli**".

Pour $k < a$: les inégalités triangulaires empêchent la courbe de s'approcher de l'origine : elle se scinde en deux.

Pour $k << a$: l'ovale se réduit a deux "larmes" autour de A et B. Snif ! ...



, les points A et B ont pour

sitif donné k^2, on obtient :

$+ y^2] = k^4$.

quatrième degré. On dit que plus en quatre points, car le uatrième de gré.

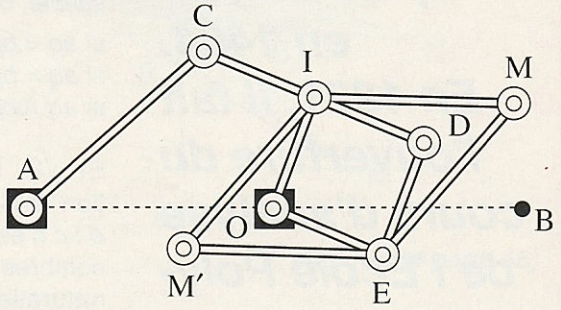
$+ a^4 = k^4$, ce qui permet un

θ.

5 VIVE LA MÉCANIQUE !

Pour les bricoleurs et autres fanatiques de Meccano, voici une façon complètement mécanique de tracer un ovale avec 9 barres articulées autour de 8 pivots comme ceci

A et O sont fixes. (On a indiqué la position de B pour mémoire.) AC = CD = AO = 1/2AB. I est le milieu de [CD]. IDEO et IMEM′ sont des losanges. Quand tout cela se met en branle, M et M′ décrivent un ovale de Cassini : c'est là qu'il faut mettre le crayon. La longueur des côtés du losange IMEM′ détermine la constante k^2. Vous m'en direz des nouvelles !



IL COURT, IL COURT, LE THÉORÈME !

LES FUTURS GARDIENS de l'état doivent être formés aux mathématiques avant d'étudier la loi : c'était déjà l'idée de Platon,faisant graver à l'entrée de son académie "*Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre*".

La Géométrie était alors la forme la plus aboutie des mathématiques. Les débutants commençaient par l'"arithmétikè" et la "logistikè", c'est-à-dire l'étude des nombres ("arithmoï") et celle des rapports ("logoï").

Il faut savoir que pour les Grecs, le rapport de deux grandeurs ou de deux nombres n'est pas un nombre : ils ne mélangeaient pas les genres. Par exemple, ce qui est pour nous le nombre 2,5 était pour eux le rapport de 3 à 2, noté 3 : 2.
Et ce que nous notons $\sqrt{2}$ était le rapport $d : c$ de la diagonale au côté dans un carré.

Essayons de faire un peu de "logistikè" : pour comparer deux rapports $a : b$ et $p : q$, la règle est simple, on calcule aq et bp :

si $aq < bp$ alors $a : b < p : q$
si $aq = bp$ alors $a : b = p : q$
si $aq > bp$ alors $a : b > p : q$

Et $\sqrt{2}$, qui n'est pas une fraction ? C'est simple : on dira que $d : c$ n'est égal à aucun rapport de nombres entiers. D'où la question, naturelle pour un mathématicien grec : *avec quel rapport de nombres peut-on approcher de $d : c$?* Autrement dit : par quels rapports de nombres peut-on encadrer $d : c$?

La géométrie élémentaire donne

$$c < d < 2c,$$

qu'on peut traduire en termes de rapports :

$$1 : 1 < d : c < 2 : 1$$

Un théorème à éclipses

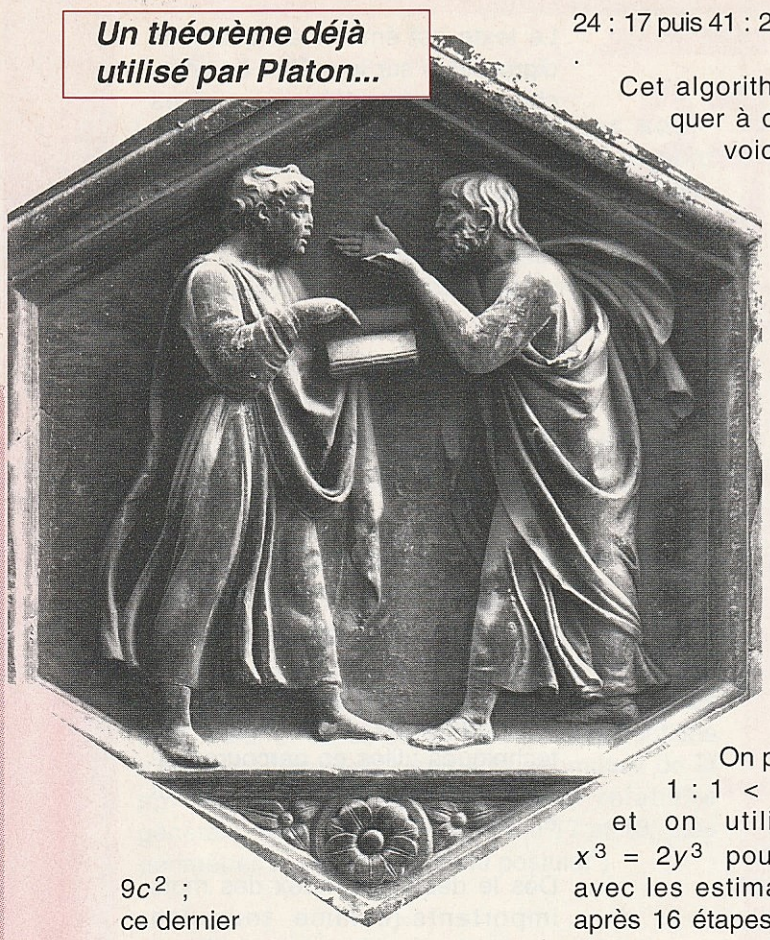
Pour aller plus loin, beaucoup plus loin, et même très loin, nous avons besoin d'un théorème probablement connu de Platon mais dont on ne retrouve la trace que 700 ans plus tard, dans la "*Collection mathématique*" de Pappus. Et qui ne réapparait que 800 ans après dans la "*Triparty en la science des nombres*" de Nicolas Chuquet. Pour finir 350 ans plus tard comme le premier théorème du Cours d'Analyse d'Augustin Cauchy :

> *Si* $a : b < p : q$,
> *alors,* $a : b < (a+p) : (b+q) < p : q$

En d'autres termes, $(a+p) : (b+q)$ est un rapport intermédiaire entre $a : b$ et $p : q$.
Par exemple, à partir de 1 : 1 et de 2 : 1, on obtient 1 : 1 < 3 : 2 < 2 : 1
Les deux rapports $d : c$ et 3 : 2 sont compris entre 1 : 1 et 2 : 1.
Comparons-les, en utilisant le fait que $d^2 = 2c^2$ (Pythagore !).
Il faut comparer $2d$ et $3c$; comparons leurs carrés, $4d^2$, soit $8c^2$, et

On pense qu'il était à Athènes en – 400 ; on l'a vu à Alexandrie vers + 300, puis à Lyon en 1484. En 1821, il fait l'ouverture du cours d'analyse de l'École Polytechnique ...

Un théorème déjà utilisé par Platon...



$9c^2$;
ce dernier est plus grand, donc $d : c < 3 : 2$.

On est ainsi passé de :

$$1 : 1 < d : c < 2 : 1$$

à : $$1 : 1 < d : c < 3 : 2,$$

c'est-à-dire à un encadrement plus fin, à partir duquel on recommence.
On développe ainsi un algorithme, résumé de façon moderne par le tableau en bas de page. Pratiquement, quand on tombe "au-dessus", on prend l'estimation comme majorant à l'étape suivante, en conservant le minorant. Et quand on tombe "en-dessous", on fait le contraire.

On obtient ainsi une suite d'encadrements de plus en plus fins de $d : c$:

7 : 5 puis 10 : 7 puis 17 : 12 puis 24 : 17 puis 41 : 29 puis 58 : 41 ...

Cet algorithme peut s'appliquer à d'autres rapports : voici deux exemples célèbres.

D'abord le rapport en jeu dans le problème de la "duplication du cube", qu'on peut énoncer ainsi :

Quel peut être le rapport $x : y$ des côtés de deux cubes pour que l'un soit le double de l'autre (en volume) ?.

On part de :

$$1 : 1 < x : y < 2 : 1 \quad ,$$

et on utilise la relation $x^3 = 2y^3$ pour comparer $x : y$ avec les estimations obtenues ; après 16 étapes, par exemple, on obtient :

$$635 : 504 < x : y < 349 : 277,$$

ce qui, vu aujourd'hui, donne une valeur approchée avec 5 décimales exactes.

Autre exemple : le rapport $c : d$ de la circonférence au diamètre d'un cercle, qu'on appelle π depuis ... à peine 150 ans ! Dans son traité sur la mesure du cercle, Archimède (– 287; – 212) prouve l'encadrement :

$$6336 : 2017\,{}^{1}/_{4} < c : d < 14688 : 4673\,{}^{1}/_{2}$$

On applique notre algorithme au minorant pour arriver à :

$$223 : 71 < 6336 : 2017\,{}^{1}/_{4},$$

et au majorant, pour arriver à :

$$223 : 71 < c : d < 22 : 7.$$

C'est un encadrement un peu plus large que celui d'où nous sommes partis, mais avec des rapports beaucoup plus simples.
D'ailleurs Archimède lui-même remplace son encadrement initial par :

$$3 + 10 : 71 < c : d < 3 + 10 : 70.$$

Tiens, tiens !

$$3 + 10 : 71 = 223 : 71,$$
et $$3 + 10 : 70 = 22 : 7.$$

De là à penser qu'Archimède utilisait cet algorithme ...
Signalons pour conclure, que sous une forme condensée, ce même algorithme réapparaîtra au XVIIe siècle sous le nom de "fraction continue". Mais ça, c'est une autre histoire ...

Jacques Lubczanski

Source *: D. M. Fooler "The mathematica of Plato's Academy", Oxford 1987.*

... et réutilisé par Cauchy.

étape	*minorant a : b*	*majorant p : q*	*estimation (a+p) : (b+q)*	*comparaison avec d : c* $(a+p)^2 - 2(b+q)^2$	*position*
1	1 : 1	2 : 1	3 : 2	$3^2 - 2 \times 2^2$	*au-dessus*
2	1 : 1	3 : 2	4 : 3	$4^2 - 2 \times 3^2$	*en dessous*
3	4 : 3	3 : 2	7 : 5	...	...
4	...	...	...	...	...

NOTES DE LECTURE

Math en jeans... ... le livre !

Actes du Congrès de Strasbourg
IREM de Strasbourg
Association MATH EN JEANS
Local APMEP - 26, rue Duméril
75013 Paris
114 pages, 70 francs.

Math en jeans, an II !
Après leurs journées de Strasbourg, en avril 1991, il fallait aux MEJ un document qui fasse le bilan – étonnant malgré leur jeune âge – des activités de leurs deux premières années d'existence et des travaux du congrès.

Un bilan tourné vers l'extérieur, d'abord, pour faire connaître Math en jeans aux partenaires potentiels (lycéens, enseignants et chercheurs), mais aussi aux journalistes et au grand public.
Il est temps, en effet, que partout, les gens sachent que la sélection par les maths ça n'existe pas vraiment, que les maths c'est pas si triste et que de nombreux jeunes y prennent autant de plaisir qu'à d'autres disciplines scolaires, ou même qu'à d'autres hobbies !

Un bilan interne aussi, sur les thèmes de recherche, les méthodes, la démarche de jumelage, la démarche d'équipe, les fonctions du congrès, les bibliographies disponibles...
Thèmes déjà traités en 90-91 ou sujets 91-92, la richesse des libellés donne envie. Il y en a pour tous les goûts : concret, abstrait, bricolage, informatique, géométrie, algèbre ou analyse...

Autant de pistes qui susciteront, nous l'espérons, 100, 1 000 groupes Math en jeans l'an prochain et autant de vocations parmi les jeunes.

Rappelons que le prochain congrès AMEJ aura lieu au Palais de la découverte à Paris, du 11 au 14 avril, avec des participants internationaux.

Contact : 42 00 32 29.

F. D.

Hasard et chaos

David Ruelle
Editions Odile Jacob
252 pages, 140 francs.

Le hasard est partout.
Si vous en doutez, ce livre vous convaincra.
Il nous emmène visiter les domaines les plus divers : les jeux, bien sûr, mais aussi la physique classique et quantique, l'économie, les raisons de la sexualité, et même les mathématiques les plus théoriques.

Notre guide est un des chercheurs qui ont apporté une contribution décisive à la théorie du chaos, théorie en plein boom aujourd'hui et dont il nous parle bien évidemment.

L'auteur, et sans doute avec lui son éditeur, ont fait un effort pour que le texte soit accessible au plus grand nombre.
Les chapitres sont brefs, les formules rares.
Les illustrations abondent et facilitent la compréhension intuitive des théories les plus profondes. Des notes permettent toutefois d'entrer, de temps en temps, dans la technique mathématique.

Le texte est émaillé de quelques digressions sur le métier de chercheur et sur certaines pratiques en vigueur dans les milieux scientifiques. Il n'en est que plus vivant et plus instructif.

D. T.

Nuls en maths? Tout pour s'en sortir!

par une équipe de professeurs du lycée polyvalent de Sens.
Editions Bordas.
128 pages.

Ce nouvel ouvrage parascolaire s'adresse aux élèves de seconde en difficulté.
Il propose de leur faire découvrir et acquérir les méthodes et les techniques utiles en parcourant le programme de seconde. Le tout en dix-huit chapitres.

Dès le début, un index des mots importants.(comme tous les ouvrages devraient en avoir) suit et complète le sommaire.

Chaque chapitre commence par des tests d'auto-évaluation, suivis d'activités guidées traitant des techniques à maîtriser en-seconde. Les titres illustrent bien ce choix : *« Construire une-intersection », « Calculer une fréquence », « Lire un cosinus »...*

Après chaque activité, un exercice permet à l'élève de contrôler l'acquisition de la technique. On y trouve des explications claires, agrémentées d'images (une fonction est comparée à un projecteur de diapositives...)
Les corrigés se trouvent tous en fin d'ouvrage. Les corrections des tests sont réduites au strict minimum tandis que celles des-exercices sont plus détaillées.

En conclusion : un livre à lire un stylo en main par ceux qui, en-seconde, connaissent des difficultés, un ouvrage que l'on aimerait trouver dans tous les CDI de lycée.

J. C.

LE "TRIUMPHE" DE L'ENSEIGNEMENT!

SYSTEME I

1 Mo de RAM
1 lecteur 1,2 Mo ou 1,44 Mo
Disque dur 40 Mo IDE
Carte VGA 16 bits, 512 Ko
2 ports série + 1 port parallèle
Moniteur SVGA couleur 1024 X 768
Boitier Desktop Baby 200W
Clavier AZERTY 102 touches
Souris compatible Microsoft

286-12	**6500ttc**
386-SX 16	**7100ttc**
386- SX 20	**7500ttc**

SYSTEME II

4 Mo de RAM
2 lecteurs 1,2 Mo et 1,44 Mo
DD 40 Mo IDE / 80 Mo (486-33)
Carte VGA 16 bits, 512 Ko
2 ports série + 1 port parallèle
Moniteur SVGA couleur 1024 X 768
Boitier Desktop 200W
Clavier AZERTY 102 touches
Souris compatible Microsoft

386-25	**9600ttc**
386-33/40 64mc	**10600ttc**
486- SX 20	**11800ttc**
486-33 128mc	**13900ttc**

OPTIONS

1Mo de mémoire en plus	400ttc
1 lecteur supplémentaire	400ttc
MS DOS 5.0 VF	700ttc
Cable parallèle pour imprimantes	40ttc

Disque dur 80 Mo	950ttc
Disque dur 115 Mo	2100ttc
Disque dur 210 Mo	3850ttc

LES IMPRIMANTES

Imprimantes Canon à jet d'encre

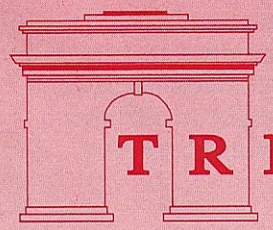
BJ-10e	BJ-300	BJ- 330
Jet d'encre	Jet d'encre	Jet d'encre
80 col/ 142cps	80 col/ 300 cps	136 col/ 300 cps
360 dpi	360dpi	360 dpi
2100ttc	**4300ttc**	**5000ttc**

Imprimantes Star

LC- 20	LC- 24-200	LP4
Matricielle 9 aig.	Matricielle 24 aig.	Laser
80col/ 180cps	80col/ 222 cps	4 pages/mn
		1 Mo Ram
		300 dpi
1625ttc	**2850ttc**	**7800ttc**

Tarif spécial enseignement - Enlèvement magasin -
Port en sus: consultez-nous.

Systèmes montés, testés et garantis par nos soins. Caractéristiques techniques et prix révisables sans préavis. Offre débutant en septembre 1991, valable dans la limite de nos stocks. Nombreuses références dans l'enseignement et la recherche .



TRIUMPHAL
Equipement professionnel Micro-Informatique

62/66 et 81, rue Amelot 75011 Paris. tél: (1) 48 06 77 77. fax: (1) 48 06 18 40. M° St Sébastien Froissart

DES SABLÉS POUR ROCARD

Au cœur de la forêt, en Sologne, des antennes, sont braquées en permanence vers le ciel. Leur mission : détecter tous les signaux venus d'ailleurs, et, pourquoi pas, des messages venus du fond de l'Univers, d'un monde peut-être disparu depuis des millions d'années.

Le propos n'est pas polémique. Nous sommes en visite à Nançay, petit bourg célèbre pour ses sablés au goût délicieux et pour la station de radio-astronomie cofondée par Rocard ... Yves, le père de notre ex-premier ministre, au milieu des sables solognots.
Pas de petits hommes verts, mais notre regard se tourne vers une bien belle musique céleste, celle de notre histoire, de notre voyage dans l'Univers.

Perdu au milieu d'une vaste forêt, le centre de radio-astronomie de Nançay se laisse découvrir au travers de sa forêt d'antennes de toutes formes. L'immense miroir grillagé, imposante et mystérieuse masse de 400 tonnes, un vaste rectangle métallique de 200 mètres de long sur 40 mètres de haut, mobile autour de son axe longitudinal. Le second miroir, image déformée du premier, parcelle de sphère de 300 mètres de large sur 35 mètres de haut.
Et cette tour, curieux capteur de l'Univers et de sa variété, assemblage de bric et de broc, avec ses trois entonnoirs à ondes, caverne sur rails ; un train de la science qui ne parcourt que 700 kilomètres par an mais qui constitue le ticket nécessaire à l'avancée de notre réflexion, au son des ondes décimétriques.

Tout ici est précis, réglé au millimètre près. L'ordinateur et le calcul numérique sont rois. Plus loin sur l'immense territoire de l'observatoire, la cueillette des ondes se pratique avec la monotone série des "saladiers", coupoles paraboliques des radiohéliographes, tournées vers le soleil, comme leur nom l'indique. Avec, aussi, les 144 antennes hélicospirales, témoignages de l'espionnage de Jupiter, qui nous font décoller du sol froid pour rejoindre par l'imagination le voyageur de *2001, l'odyssée de l'espace*.

■ *Dialogue sans direct*

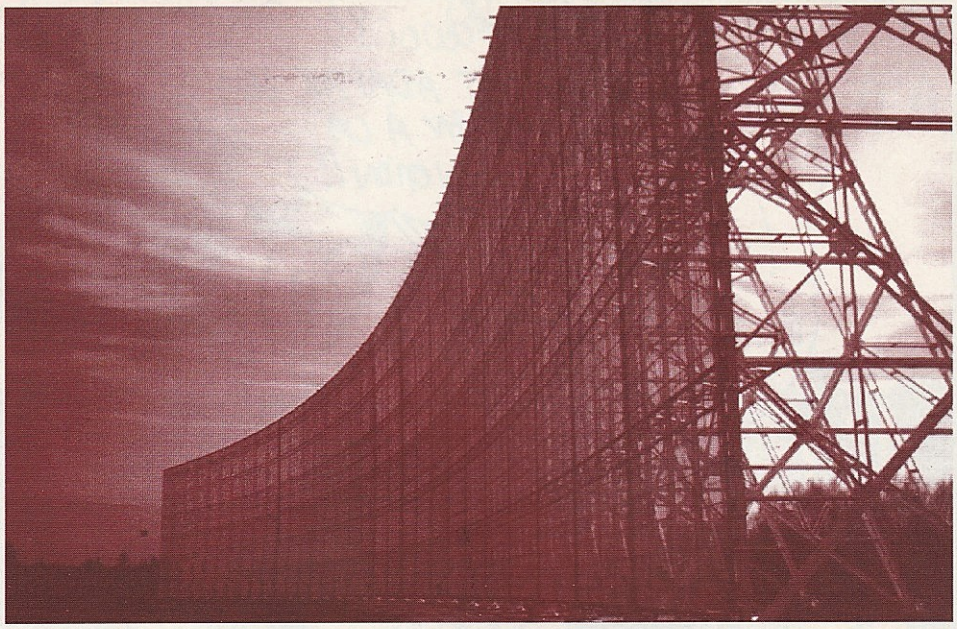
Mais qu'observent donc les radio-astronomes ? Tout, et pas n'importe quoi !
Certes, si quelque part une étoile se mettait à nous fredonner *Moonlight serenade*, le monde entier serait en émoi. Car s'il est possible de conférer une probabilité voisine de 1 (la certitude) à l'existence d'êtres doués de réflexion sur une autre planète, autant la probabilité d'en percevoir un signal est voisine de zéro (quasi-impossibilité).
Avec, de toute façon, ce paradoxe qu'un tel signal nous serait parvenu des millions d'années après son expédition, et qu'un dialogue ne pourrait se faire que de générations éloignées en générations éloignées ... si les hasards catastrophiques ne s'en

mêlaient pas (extinction de soleil, rencontre fâcheuse avec un autre astre, effet de serre, explosion nucléaire et j'en passe, des naturelles ou des industrielles ...).

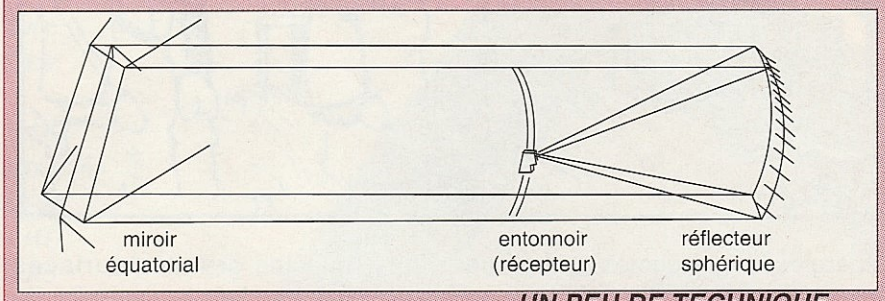
■ Des yeux pour l'invisible

Donc pas de communication. Simplement *l'audition* du monde. Les radio-astronomes recherchent les traces d'hydrogène (émission sur la longueur d'onde 21 cm), de radicaux hydroxyle OH (18 cm) et bien d'autres. Ils contemplent, et enregistrent les pulsars, ces métronomes célestes, à la pulsation si régulière qu'elle pourrait bientôt nous servir de référence pour compter le temps.

Ils reconstituent les photos de leurs sources de tous ordres, et les enluminent de couleurs aussi somptueuses qu'artificielles : l'ordinateur joint tous les points situés au même niveau d'énergie électromagnétique et l'homme choisit ensuite les couleurs à appliquer pour représenter chaque valeur ou intervalle de valeurs de la fonction

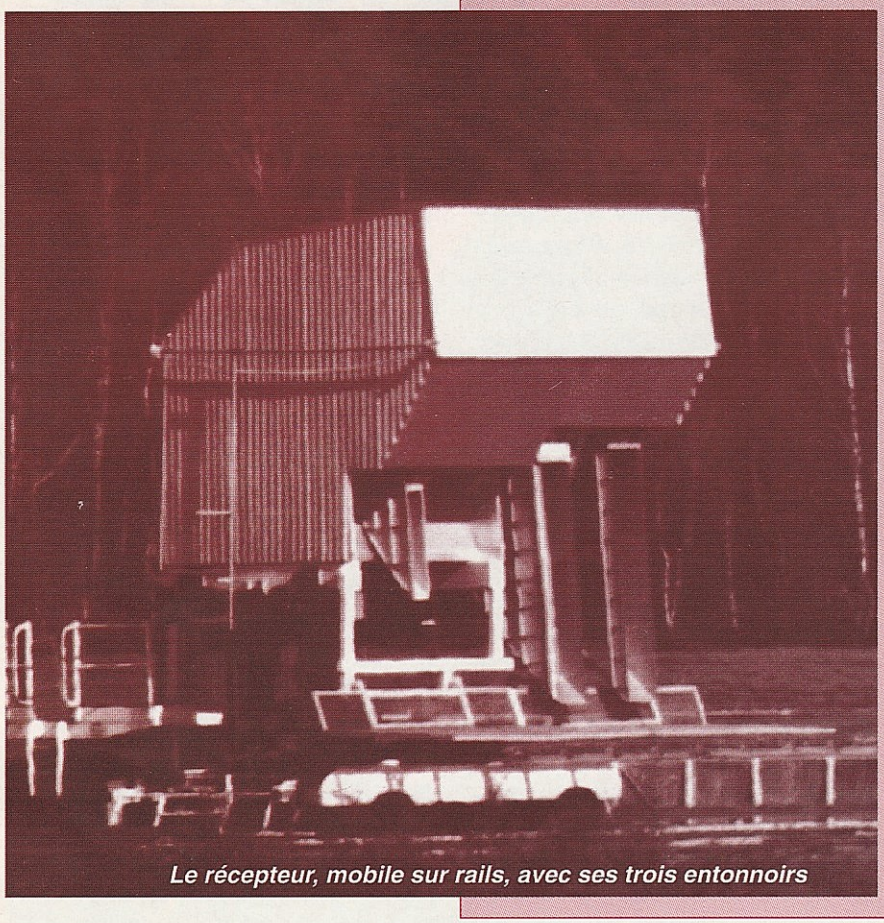


Le réflecteur : uneparcelle de sphère de 200 mètresde long



UN PEU DE TECHNIQUE

Prévue pour des longueurs d'ondes d'environ 10 cm, la maille du grand radio-téléscope a 12 mm de côté. Sa construction est extrêmement précise, malgré son allure de vulgaire grillage pour clôture. Le premier miroir, équatorial, est plan. Il peut donc balayer la voûte céleste mais ne peut, à lui seul assurer le suivi d'une source fixe pendant que la Terre tourne.
Le second réflecteur, sphérique, renvoie le signal au centre de la sphère. Là, des récepteurs munis de collecteurs (des entonnoirs à ondes) peuvent se déplacer sur des rails, permettant ainsi d'observer une source malgré son déplacement apparent. Grâce aux ordinateurs de guidage, les récepteurs se déplacent en temps réel, au fur et à mesure que le signal se concentre en des points voisins. L'autocorrélateur, un calculateur numérique, échantillonne le signal en 2^{10} points (c'est à dire qu'il le décompose, exactement comme il est pratiqué dans l'enregistrement de la musique pour disques compacts).



Le récepteur, mobile sur rails, avec ses trois entonnoirs

énergie. Et ces photos font naître sous nos yeux des galaxies ou des étoiles qu'ils seraient bien incapables de voir, même avec les téléscopes optiques les plus puissants, fussent-ils installés en orbite (Hubble) ou sur la Lune (en projet).

■ Des antennes variées

Pour révéler le champ électromagnétique (comme on révèle l'image virtuelle sur le papier photographique), il faut, au début de la chaîne une antenne. Selon le rayonnement observé, les réflecteurs qui permettent de concentrer l'énergie sur cette antenne devront avoir des caractéristiques adaptées : une maille inférieure au dixième de la longueur d'onde. Si pour certaines radiations un grillage (d'excellente qualité !) suffit, pour d'autres, il faut des surfaces métalliques aussi régulières que celles destinées aux miroirs des télescopes optiques.

C'est pourquoi nous voyons aussi bien des "saladiers", semblables à ceux, qui permettent de capter les émissions TV relayées par satellites, que les grandes surfaces grillagées qui font la célébrité de Nançay.

Une fois collecté, le signal est soumis à un traitement analogique ou informatique, donc numérique et mathématique — et c'est bien la raison de la présence en ce lieu d'un envoyé spécial de Tangente — avant d'être archivé. Tous nos lecteurs ont déjà vu des films d'espionnage où le bon espion, caché dans les broussailles du stade Charléty, à Paris, capte, grâce à un micro à réflecteur parabolique, la conversation qui se tient derrière les vitres de l'appartement du huitième dans l'immeuble situé en face, à Ivry, de l'autre côté du boulevard périphérique ... Rien de plus simple ? Essayez donc à 17 heures un vendredi ! Le périphérique, ça, vous le capterez bien dans votre micro. Pour le reste ...

■ Des bruits dans l'espace

Le radio-astronome est dans la même situation. Du *bruit,* dans les ondes, il y en a. D'abord le bruit des instruments de mesures : leurs composants électroniques ne sont pas parfaits, même si leur qualité dépasse largement celle des appareils domestiques ; le bruit de la Terre près des antennes, la réflexion des ondes

RADIO-ASTRONOMIE

Nançay baigne, comme chacun d'entre-nous, dans le champ électro-magnétique, champ d'énergie. Physiquement, à voir comme une déformation locale de l'espace-temps en chaque lieu. Les aventures d'Anselme Lanturlu (Du Géométricon au Big-Bang, aux éditions Belin) seront une aide précieuse à celles et ceux qui ne voient pas cette déformation !

En installant un récepteur, il est possible de constater cette déformation. C'est ce que font nos antennes de radio ou de télévision. Et, toute proportion gardée, les observatoires de radio-astronomie et d'astronomie, dans leurs domaines respectifs. Une fois posée l'antenne, il faut traiter le signal reçu, ainsi que nous l'avons vu. Au contraire de l'astronomie, sa soeur, la radio-astronomie est une science récente. Elle est liée à la cosmologie, aussi ses partenaires dans l'effort de réflexion viennent de tous bords, philosophie comprise, tant l'Univers nous pousse dans les derniers retranchements de nos neurones. C'est donc une science-confluence : mathématiques, astrophysique, chimie, physique quantique, cosmologie... Tout est bienvenu pour mieux comprendre le monde.

Née autour de la seconde guerre mondiale, très fortuitement, avec le radar, cette science a bénéficié du développement de l'électronique puis de la mise au point d'ordinateurs toujours plus puissants. Nançay est l'un de ses plus beaux fleurons mondiaux.

SUR LES ONDES

Il est particulièrement difficile d'imaginer ce qu'est réellement une onde électromagnétique telle que la lumière visible ou les ondes radio.

On peut toutefois la comparer au son : l'oreille est sensible aux variations matérielles de la pression de l'air qui nous entoure.
De même, les yeux perçoivent la lumière ... c'est-à-dire rien ou presque. Rien car un photon, grain d'énergie, de lumière, n'a pas véritablement de sens matériel, et un champ électromagnétique n'a d'autre sens que théorique.

Rassurez-vous, ce théorique, très mathématique, est conforté par les nombreuses expériences qui se succèdent depuis que ... l'on voit mieux ce qu'il signifie.
C'est Maxwell, James, pas le même, et pas celui du café, qui fut le véritable précurseur en ce domaine, au siècle dernier, associant aux champs électromagnétiques des équations particulières.

Une onde électromagnétique est caractérisée par sa fréquence ν, exprimée en Hertz, (le nombre de vibrations par seconde), ou sa longueur d'onde λ, liée à la précédente par la formule $\lambda = c/\nu$, où c désigne la vitesse de la lumière ; cette longueur d'onde représente l'espace qui sépare deux maxima successifs du champ électrique lors de la propagation de l'onde.

La zone de la "lumière visible", notion parfaitement anthropomorphique, est très étroite (de 4×10^{14} à 8×10^{14} Hz), alors que les ondes électromagnétiques couramment rencontrées vont des grandes ondes radio (de l'ordre de 10^5 Hz) aux rayons γ (de l'ordre de 10^{20} Hz), en passant par les ondes TV, radar, l'infrarouge, l'ultraviolet, les rayons X ...

sur le sol, que l'on supprime en tendant du grillage ; plus loin, le bruit des humains : par manque de chance, les fours à micro-ondes fonctionnent avec prodigalité dans les gammes d'ondes observées ; le bruit du Soleil, son rayonnement au spectre large, agréable si c'est votre sujet d'observation, pas du tout dans le cas contraire ; le bruit de fond de l'Univers, énergie fossile du Big bang originel, dont la température de rayonnement est de 3 degrés Kelvin, bref des bruits par wagons entiers. Il faut donc d'abord amplifier le signal électrique reçu, prendre le meilleur, le plus repérable. C'est le rôle de *l'intégration* du signal (on accumule le signal perçu pendant un certain temps) ; puis il faut *filtrer* les bruits connus et les bruits *aléatoires*, car on ne cherche que des signaux réguliers ; enfin il faut décomposer les signaux mélangés en leurs composantes des diverses fréquences. Ici interviennent les *produits de convolution* et la *transformation de Fourier*, du nom de ce brave préfet de l'Isère qui, au début du XIXe siècle, bricolait les maths tout en représentant l'État. Pour terminer, il reste à comparer avec les spectres des éléments chimiques recherchés.

L'antenne parabolique d'un radiohéliographe

Des maths qui ne sont pas sans rappeler celles qui interviennent dans la transmission et la reproduction du son numérique. Sans parler des calculs nécessaires pour mettre au point la forme de l'entonnoir à ondes, ou pour établir les *algorithmes* de guidage du récepteur, calculs en temps réel, car la Terre est mobile sur elle-même et autour du soleil, qui est lui même mobile dans la galaxie, qui se déplace elle même dans l'amas galactique ... Mathématicien, un métier du futur ? Un métier cosmos-polite ?

Jean-Pierre Gerbal

MATHÉMATIQUES SURPRISES

Les radio-astronomes ont trouvé, en étudiant des gaz interstellaires, un spectre non connu (un spectre c'est l'image personnalisée d'un élément chimique, lorsque, excité, il émet une onde). Les chimistes ont alors proposé une nouvelle molécule non présente sur Terre : le carbone 60. Sa forme : une sphère pavée d'hexagones et de pentagones.

Retour des mathématiciens : depuis Euler (1758), nous savons que tout polyèdre de l'espace à trois dimensions vérifie la formule : $s - a + f = 2$, où a désigne le nombre des arêtes, s celui des sommets, et f celui des faces.
Nous en déduisons qu'un pavage hexagonal refermé sur lui même comporte au moins douze pentagones. Reste alors à associer le nombre de pentagones et d'hexagones maximisant la stabilité des liaisons pour avoir une chance de synthétiser cette molécule en laboratoire...
(Sciences & Avenir, septembre 1991).

LE RALLYE DES RALLYES

LA NOUVELLE VAGUE DES JEUX ET RALLYES

Tournois locaux, rallyes régionaux, compétitions nationales et internationales, les jeux et rallyes mathématiques se développent à un rythme tel qu'on peut considérer qu'ils constituent un phénomène décisif dans le paysage mathématique français.

IL Y A CEUX QUI LES boudent, et ceux qui ne jurent que par eux.
Leur développement spectaculaire en fait un des phénomènes majeurs de l'enseignement des mathématiques. De quoi s'agit-il ?

Des jeux, championnats, rallyes, concours mathématiques, bien sûr !

Tangente a depuis sa création contribué à vous informer*, à vous encourager à participer, à vous livrer les meilleurs problèmes. Nous continuons dans ce numéro avec un gros plan sur deux concours et rallyes régionaux.

Comme le dit le préambule de l'un d'entre eux, le concours régional de mathématiques de La Réunion, *au-delà de l'aspect ludique, les arrières pensées pédagogiques ne sont pas absentes. L'idée essentielle est que l'on n'apprend pas à faire des maths en contemplant des théories, aussi belles et savantes soient elles, mais plutôt en se frottant à des problèmes et des situations de recherche. Il faut se mettre à l'eau pour apprendre à nager ; pour savoir résoudre des problèmes, il faut en chercher.*

Ce n'est pas la seule justification des jeux dans l'enseignement des mathématiques.

Au mois de juin dernier, l'APMEP** a eu la bonne idée d'organiser son séminaire annuel sur ce thème.
Les questions auxquelles les participants ont tenté de répondre donnent la dimension du phénomène :

- Comment accueillir de nouveaux types de problèmes ?
- Peut-on et doit-on préparer les élèves à la "compétition non scolaire" ?
- Que penser de l'esprit de compétition qui ne manquera pas de naître ?

■ *La sélection du groupe "Jeux"*

Les groupes de travail, qui comprenaient plusieurs organisateurs de telles compétitions et auteurs de problèmes, ont planché sur trois thèmes principaux :
Côté organisateurs : la création et le choix de problèmes
Côté élèves : les motivations, stratégies, et qualités développées au cours de ces épreuves
Côté enseignants : les jeux permettent-ils une nouvelle approche des pratiques pédagogiques ?

Dans le compte-rendu de ce séminaire, on peut trouver, outre les enseignements de ce travail, la présentation d'une prochaine brochure, JEUX 4, préparée autour de ce thème par le groupe "Jeux" de l'APMEP. Ce groupe a retenu huit

énoncés, que vous trouverez dans l'encadré ci-contre, parmi ceux posés ces dernières années. Il demande aux lecteurs de Tangente qui le souhaiteront de l'aider en adoptant la procédure suivante :

1 : Sélectionnez un ou plusieurs de ces problèmes
2 : Résolvez chaque problème choisi
3 : Notez votre démarche
4 : Donnez-le à résoudre à d'autres (en particulier des élèves)
5 : Notez, selon les niveaux, les démarches rencontrées
6 : Faites parvenir vos conclusions

■ Alsace, Aquitaine et Réunion

Nous vous avons déjà parlé dans un numéro précédent d'une nouvelle épreuve organisée en Alsace et en Allemagne, Mathématiques sans frontières, réservée aux classes de troisième et seconde. Cette épreuve prend une ampleur considérable que nous sommes heureux de souligner, et nous vous livrons dans les pages suivantes, outre des énoncés du concours de La Réunion destinés aux secondes et premières, plusieurs des problèmes auxquels elle a donné lieu.

Vous trouverez également des énoncés du Rallye mathématiques d'Aquitaine, une nouvelle épreuve qui démarre très fort, et que notre magazine soutient.

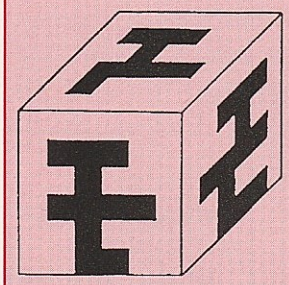
Gilles Cohen

*Si vous souhaitez que nous donnions des informations sur votre rallye ou concours mathématiques, écrivez-nous, à la rédaction de Tangente ou directement à G. Cohen à la FFJM, dès que vous disposez d'informations. N'oubliez pas de joindre si possible, avec les épreuves, leurs solutions.

** Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 26 rue Duméril, 75013 Paris.

Tous à l'oeuvre

Une oeuvre d'art moderne, constituée de cubes opâques d'un centimètre d'arête collés entre eux par des faces, est à l'intérieur d'un cube translucide de six centimètres d'arête. On ne voit de l'oeuvre que ses ombres sur les faces du grand cube.



Quel est le volume maximum de l'oeuvre ? Quel est son volume minimum ?

Quel menteur !

Quatre amis visitent un musée avec seulement trois billets d'entrée. Ils rencontrent un gardien qui veut savoir quel est celui qui n'a pas payé son entrée.
- Ce n'est pas moi, dit Paul
- C'est Jean, dit Jacques
- C'est Pierre, dit Jean
- Jacques a tort, dit Pierre

Sachant qu'un seul d'entre eux ment, quel est le resquilleur ?

A la queue leu leu

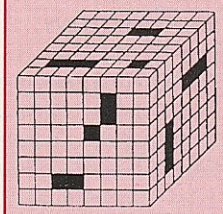
On écrit les soixante premiers entiers non nuls :

123456789101112131415161718192 02122.....57585960

Rayer cent des chiffres ainsi écrits de sorte que le nombre formé des chiffres restants, sans en changer l'ordre, soit le plus grand possible.

Le cube truffé

Dans ce grand cube, toutes les rangées aux extrémités noircies sont constituées de petits cubes noirs ; tous les autres petits cubes sont blancs.



1 : Combien y a-t-il de petits cubes blancs ?

2 : On enlève une couche de petits cubes sur chacune des six faces du grand cube. Faire le dessin du nouveau cube.

Le carré incomplet

emplissez ce tableau de sorte qu'il ne comporte que des entiers strictement positifs, et que, pour chaque ligne, chaque colonne, et chaque diagonale, le nombre du milieu soit la moyenne des deux nombres qui l'encadrent.

	12	
		8

On indiquera le nombre de solutions possibles.

Les cubes colorés

On peint un grand cube sur toutes ses faces. Puis on opère 54 coupes, à l'aide d'une scie, demanière à diviser (entièrement) le grand cube en petits cubes ayant tous le même dimension. Evidemment, on ne déplace aucun morceau avant d'avoir achevé la découpe.

On obtient ainsi un grand nombre de petits cubes, dont certains sont colorés (ont au moins une face peinte), et les autres n'ont aucune trace de peinture.

Combien y a-t-il de petits cubes colorés ?

Le produit maximum

Parmi toutes les sommes d'entiers positifs qui sont égales à 1789, quelle est celle dont le produit des termes est le plus grand ?

La rocade circulaire

Les maires de quatre villes A, B, C, D décident de construire une rocade circulaire passant à égale distance de chacune de ces villes.

Aidez-les à réaliser ce projet.

Concours Régional de La Réunion

Entiers réversibles

1991 est un entier réversible : si on le lit de droite à gauche, il ne change pas.
On écrit la suite des entiers naturels réversibles (dans l'ordre croissant) :
0,1,2,3,....,11,22,33,....,101,...,747,...,1991,...

1 : Si on arrête à 1991, combien de nombres a-t-on écrits ?
2 : Si on continue, quel sera le 1991ème élément de la suite ?

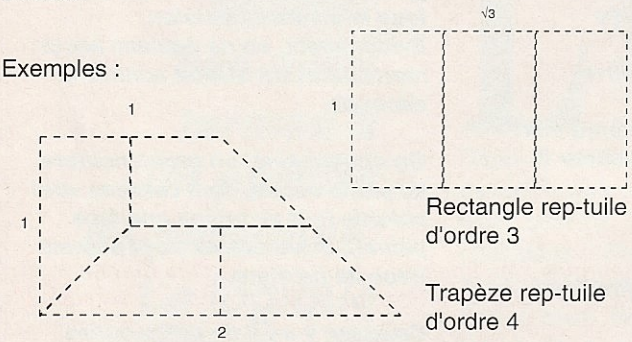
Triangles de ..... concours

Construire un triangle APM non équilatéral dans lequel la médiatrice du côté AP, la hauteur issue de A, et la médiane issue de P soient concourantes.

Les triangles rep-tuiles

Une figure est rep-tuile d'ordre n si elle peut être partagée en n figures superposables (à un retournement près), et de même forme (homothétiques) que la figure initiale.

Exemples :



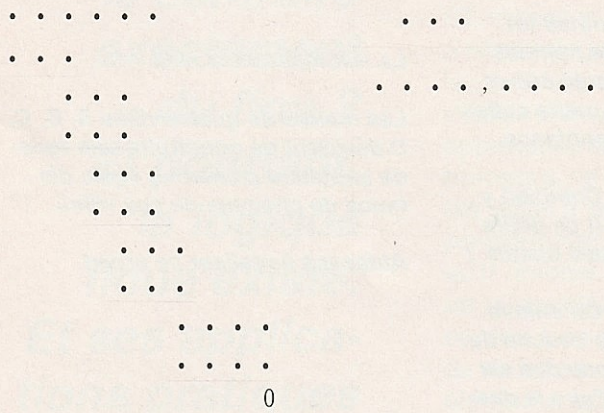
Rectangle rep-tuile d'ordre 3

Trapèze rep-tuile d'ordre 4

1 : Chercher des triangles rep-tuiles d'ordre 2,3,4.
2 : Montrer que le triangle rectangle admettant des côtés de l'angle droit de 1 et 2 est rep-tuile d'ordre 5.

La division

Un point, un chiffre : compléter.



Mathématiques Sans Frontieres

Le numéro mystérieux

Le numéro d'une carte magnétique comporte des chiffres écrits dans 14 cases en respectant la règle suivante : la somme des chiffres de trois cases consécutives est toujours égale à 20.

Compléter la grille ci-dessous :

			9							7			

Un texte savant

Un jour, deux hommes avaient, l'un trois pains, l'autre deux pains. Ils allèrent se promener près d'une source. Lorsqu'ils furent arrivés en ce lieu, ils s'assirent pour manger. Un soldat passa, ils l'invitèrent. Celui-ci prit place à côté d'eux et mangea avec eux, chaque convive ayant part égale. Lorsque tous les pains furent mangés, le soldat partit en leur laissant cinq pièces pour prix de son repas. De cet argent, le premier prit trois pièces, puisqu'il avait apporté trois pains, le second prit les deux pièces qui restaient pour prix de ses deux pains.
Ce partage a-t-il été bien fait ? Sinon, proposer le partage qui semble le plus équitable.

(D'après Léonard de Pise : De duobus hominibus panes habentibus)

Exercice folklorique

Au début d'un spectacle de danses folkloriques, il y a trois fois plus de danseurs que de danseuses. Après le départ de huit couples, il reste sur scène cinq fois plus de garçons que de filles.

Combien y avait-il de danseurs et de danseuses au début du spectacle ?

Accoler et coller

Découper dans du papier 20 triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 6 cm.
Montrer qu'on peut disposer ces triangles de telle manière qu'ils forment un carré.
Reconstituer le puzzle.

Rayon de lune

Un astronaute en mission sur la Lune a posé son vaisseau spatial dans une grande plaine, la mer de la Tranquillité. Debout sur le sol, il mesure à l'aide d'un rayon laser la distance qui le sépare de la pierre la plus lointaine qu'il puisse apercevoir à l'horizon. Il trouve 2395 m. L'instrument est posé à 1,65 m du sol.
Calculer le rayon de la lune à 1 km près.

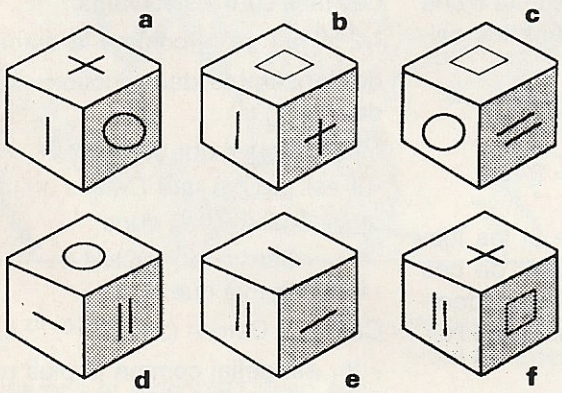
LES BOUGIES

La bougie A se consume entièrement en 3 heures et 30 minutes, la bougie B en 5 heures.
Combien mesure la bougie B, sachant que la bougie A mesure 14 centimètres, et que lorsqu'on les allume en même temps, elles sont à la même hauteur au bout de deux heures ?

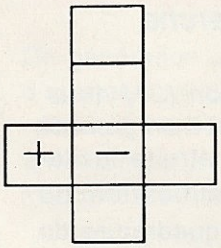
Les deux bougies sont assimilées à des cylindres de révolution.

HISTOIRES DE CUBES

Parmi les six images a, b, c, d, e et f, cinq sont celles d'un même cube (dans diverses positions) appelé "bon cube", et une est celle d'un cube différent appelé "mauvais cube".



Nous avons commencé à dessiner le patron du "bon cube".
Terminez-le !



Sur quelle image est représenté le "mauvais cube" ?

LE MASTER MIND

Il s'agit de retrouver un nombre de cinq chiffres à l'aide des informations ci-dessous. Le principe :
- Un rond noir indique un chiffre exact bien placé
- Un rond blanc indique un chiffre exact mal placé

5	8	7	3	1	●	●		
7	2	3	1	4	●	○		
1	7	4	2	3	●	○		
8	5	2	6	7	○	○	○	○
3	6	1	4	2	○	○	○	

LES NOMBRES RACCORDÉS

Nous dirons que les nombres 390, 394, 196, et 784 sont "raccordés" par 2, car

$$390+2 = 394 - 2 = 196 \times 2 = 784 : 2$$

De même, 210, 222, 36, et 1296 sont "raccordés" par 6 :

$$210 + 6 = 222 - 6 = 35 \times 6 = 1296 : 6$$

On observe que 1764 = 390 + 394 + 196 + 784 est la somme de quatre nombres raccordés par 2.
De même, 1764 = 210 + 222 + 35 + 1296 est aussi la somme de quatre nombres raccordés par 6.

Quel est le plus petit nombre plus grand que 1991 ayant cette même propriété ?

C'est-à-dire qui peut s'écrire :
- d'une part comme la somme de quatre entiers raccordés par 2
- d'autre part comme la somme de quatre entiers raccordés par 6.

L'ILE

Une île a la forme d'un triangle.
Quel est le point de l'île le plus éloigné de la mer ?

COHABITATION

Les "bêtes à mauvais caractère" sont des animaux qui ne peuvent cohabiter que sous une condition : être éloignées les unes des autres d'au moins huit mètres.
Peut-on faire cohabiter 10 "bêtes à mauvais caractère" dans un enclos rectangulaire de 18 mètres de longueur et de 15 mètres de largeur ?

LA CALCULATRICE STAR

*La calculatrice star ne sait faire qu'une seule opération : l'opération *. Etant donnés deux nombres a et b, le résultat de la séquence a*b est le nombre 1–a/b.*

*Par exemple, le résultat de la séquence 9*1 est 1–9/1, soit –8.*
Quelles séquences permettent d'obtenir :
- Le quotient de 251 par 37 ?
- Le produit de 1789 par 1991 ?

*N.B. On a droit aux parenthèses, puisque les touches de la calculatrice sont, outre les dix chiffres de 0 à 9, la touche *, la touche =, les touches "on" et "off", et les touches parenthèses.*

COURRIER

■ Prix ou pas prix ? Public ou privé ?

Gilbert Walusinski nous écrit à propos des compétitions : «Je suis bien forcé d'accepter le monde tel qu'il est. Mais je regrette que l'enseignement favorise le goût de la compétition qui, si elle amène l'individu à se surpasser, présente en même temps le mauvais côté de favoriser l'arrivisme... Sans compter les retombées fanatiques, comme on le voit dans les sports, et les poussées nationalistes très profondément malsaines.
Je remarque que, depuis 1968, on a presque partout supprimé dans les collèges et les lycées les "distributions de prix", mais que, depuis, on a inventé , sous forme d'olympiades régionales, nationales ou internationales, des compétitions intéressantes quant au fond mais qui portent aussi les tares de toutes les compétitions.»

A propos du prix japonais (Tangente n° 21, p.8) il ajoute : «Je lis, parmi les atouts de ce prix *"son institution est privée, donc indépendante des pressions politiques ; elle est purement scientifique, donc objective."* Privée, donc indépendante... Affirmation d'une belle naïveté. Surtout quand on sait comment les choses se passent dans la démocratie japonaise. Purement scientifique, donc objective. C'est un mauvais jeu de mots. Le domaine d'attribution du prix est peut être purement scientifique mais l'institution et le jury sont des réalités humaines dont l'objectivité peut toujours être suspectée de n'être pas sans faille... »

Une opinion différente, donc, de celle exprimée dans la rubrique"En bref" du n° 21. Le débat est ouvert...

■ Mise au point

Henri Camous nous signale que l'article *« De l'autre côté de la rue »*, dans le numéro 23, comporte plusieurs erreurs imputables à la rédaction dont il ne saurait être tenu pour responsable. À savoir, mise en page défectueuse, absence d'explications sur la parité d'une différence et erreurs dans les calculs de la solution :

$i = (c^2 + p^2) - (c^2 - p^2) = 4\,cp$

au lieu de :

$i = (c^2 + p^2) - (c - p)^2 = 2\,cp.$

Nous prions l'auteur — et les lecteurs — de nous excuser de ces défauts qui ne facilitaient évidemment pas la compréhension de l'article.

■ Avis de recherche

Yves Pirat de Dijon (21) nous demande : « Existe-t-il un procédé qui permet de construire facilement $2\pi R$ (= rectification du cercle) et $R\sqrt{\pi}$ (= quadrature du cercle) en n'utilisant que le compas et la règle non graduée et en donnant à Pi sa valeur connue à ce jour (3 + quelques millions de décimales) ? »

La réponse est non... et nous renvoyons la balle dans le camp des lecteurs !

Ajoutons que Yves Pirat a déjà publié sur ce sujet : «Approchons π avec une erreur de 1/40 000 000 000» *dans le n° 50 (Avril 1988) de la revue* «L'Ouvert» *de l'IREM de Strasbourg (Université Louis-Pasteur), et «Premiers pas vers une théorie parabolique des nombres dans le n° 45 de la même revue, en décembre 1986».*
Il a fait, nous dit-il, beaucoup mieux depuis !

■ Transfinis

Opher Liba, professeur à Jérusalem, nous envoie une mise au point à propos du n° 24 :

« Dans l'article *"Compter l'infini"* de B. Rittaud (*Tangente n° 21, p. 23)* s'est glissée une grave erreur mathématique. Il est écrit : *"On note : Card (R) = $\aleph_1$. On montre que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$*
Les faits sont les suivants :

- $2^{\aleph_0}$ est <u>défini</u> comme le cardinal de l'ensemble des fonctions de N dans [0,1].
- il est <u>prouvé</u> que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$
- il est <u>prouvé</u> que Card P (N) est <u>aussi</u> égal à $2^{\aleph_0}$, donc :

  Card P (N) > Card N.
- il est <u>prouvé</u> que :

  Card R = Card P (N) = $2^{\aleph_0}$.
- $\aleph_1$ est <u>défini</u> comme le plus petit cardinal strictement supérieur à $\aleph_0$.
- si l'on <u>décide</u> que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, on a la fameuse <u>hypothèse du continu</u> (Hc). On peut également décider <u>autrement</u> et avoir par exemple :

  $2^{\aleph_0} = \aleph_5$

Cantor a conjecturé que l'hypothèse du continu était vraie.
Kurt Gödel a prouvé qu'elle ne pouvait être réfutée (1939) et Paul Cohen a prouvé qu'elle ne pouvait être prouvée (1963), à la base des axiomes de Zermelo-Fraenkel qui forment le système d'axiomes le plus coté en théorie des ensembles.
En résumant, ni *"On note :* Card R = $\aleph_1$" ni *"On montre que* $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ne sont corrects (bien que l'implication soit vraie !!).»

Aidez TANGENTE à se développer dans les lycées

Vous êtes enseignant :

Tangente est l'outil privilégié d'une pédagogie vivante des mathématiques ouverte sur la culture, pour encourager les vocations scientifiques.

Parlez-en ! *A vos élèves, en classe, après le cours ou en club, à vos collègues, à vos amis passionnés de mathématiques.*

Montrez-le ! *Vous recevrez une affichette, et un exemplaire supplémentaire de la couverture et du sommaire de chaque numéro.*

Utilisez-le ! *Reproduisez des articles pour votre classe, (en mentionnant source et adresse), faites faire des exposés ou enquêtes en documentation.*

Diffusez-le ! Faites connaître nos abonnements groupés.

Vous êtes lycéen :

Tangente est une lecture passionnante et agréable, mais, de plus, un moyen exceptionnel d'acquérir une véritable formation mathématique.

Parlez-en ! *Faites partager cette chance à vos camarades, à vos professeurs !*

Montrez-le ! *Affichettes, autocollants, T-shirts, pin's... Tangente lance sa collection d'été : ayez le "must" Tangente !*

Utilisez-le ! *Pour mieux comprendre les sujets abordées en classe, en prenant le recul nécessaire, pour vos exposés, pour vos activités de club.*

Diffusez-le ! *Faites connaître nos abonnements groupés.*

Devenez Tangente -Vecteur, et recevez un cadeau original !

(Bulletin à retourner à Tangente-Vecteurs, 11bis, rue Henri Wallon 95100 ARGENTEUIL)

NOM : ..... Prénom :.....

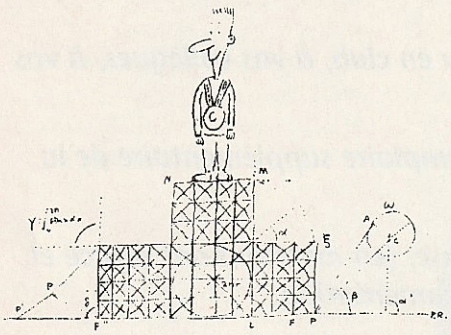
Adresse : .....

CODE POSTAL : ..... Bureau distributeur : .....

Etablissement : ..... Adresse : .....

Code postal : ..... Bureau distributeur : .....

LES SIX CANONS DE LA BEAUTÉ



Le championnat international des jeux mathématiques n'est pas seulement la plus importante compétition mathématique. C'est aussi celle qui se veut "la plus belle", c'est-à-dire qui tente de définir et de respecter dans ses choix de problèmes les canons de la "beauté".

EN LISANT L'ÉNONCÉ d'un problème, ne vous est-il jamais arrivé de vous écrier : "Mais qu'il est beau !" ?

Notion subjective, certes, mais qui fait certainement appel à quelques critères universels.

Les organisateurs du championnat international des jeux mathématiques ont cherché à formaliser ces critères dans le cahier des charges destiné au "concours de problèmes " qu'ils organisent.

Alors, nous avons eu l'idée, à Tangente, d'aller plus loin, et de solliciter nos lecteurs pour qu'ils votent lors de la désignation du plus beau problème de l'année, avec deux énoncés primés, l'un pris parmi ceux du championnat, l'autre parmi les autres jeux et problèmes présentés dans Tangente.
Pour ce qui est de la première catégorie, vous avez eu connaissance des questions de quarts de finale individuels lors du dernier numéro. Voici aujourd'hui les quarts de finale scolaires.
Dans le prochain numéro, vous découvrirez les demi-finales, qui se dérouleront le 21 mars. Et ainsi de suite, vous serez tenus informés de l'ensemble des énoncés de l'année.

■ *Election de Miss Math*

Il ne vous restera plus qu'à remplir le bulletin de vote que nous vous proposerons alors. Votre choix servira à désigner le lauréat du concours de problèmes 1992, mais vous-même, en votant, pourrez gagner un très beau livre offert par Hatier, si votre tiercé correspond, dans l'ordre à la synthèse des votes (le règlement complet paraîtra ultérieurement).

Alors, ces critères de beauté ?
Voici ceux définis par la FFJM :

- Le caractère inédit et original

- La concision et la clarté

- L'étonnement suscité, le manque apparent d'hypothèses

- L'absence d'appel aux connaissances

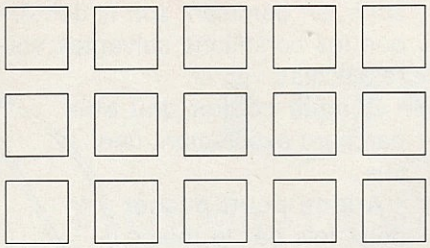
- L'habillage plaisant et ludique

- La simplicité de la solution

En trouverez-vous d'autres ? Ecrivez-nous pour nous donner votre opinion.

1 TROP DE POLICE A METROPOLIS

La police de Métropolis est sur les dents. Le quartier des docks doit être surveillé jour et nuit ; ce dernier est composé de blocs carrés régulièrement disposés (voir plan ci-contre). Un policier ne peut voir au-delà de la longueur d'un bloc ; on a illustré sur le plan les différentes possibilités de surveillance.



Déterminer le nombre minimum de policiers nécessaires pour assurer une surveillance efficace ?

2 COMPTEZ SUR VOS DOIGTS

Nina a trouvé une bien curieuse façon de compter sur ses doigts. Elle compte 1 sur le pouce, 2 et 3 sur l'index, 4, 5, et 6 sur le majeur, 7 sur l'annulaire, 8 et 9 sur l'auriculaire, puis 10, 11, 12 sur l'annulaire, 13 sur le majeur, 14 et 15 sur l'index, 16, 17, et 18 sur le pouce, 19 sur l'index, ..., etc., ... (elle enumère le nombre suivant, les deux suivants, puis les trois suivants, et recommence, en faisant des aller-retours sur les doigts d'une main.

Donnez le nom du doigt sur lequel Nina comptera 1992.

3 CARRE PRESQUE MAGIQUE

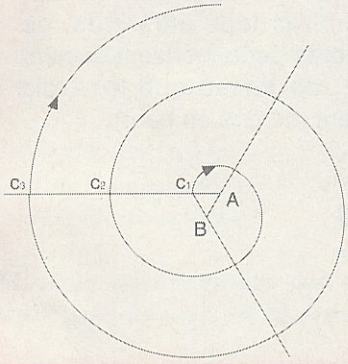
Ce carré était presque magique : la somme des nombres inscrits dans chacune des quatre lignes, des quatre colonnes, et des deux diagonales était toujours la même, mais les nombres utilisés n'étaient pas consécutifs, puisque le plus grand d'entre eux était 92. Hélas, huit nombres ont été malencontreusement effacés !

14		1	
	9	12	
11			10
	16	13	

Reconstituez le carré initial, en retrouvant les nombres éffacés

4 SPIRALE A 3 CENTRES

Les trois points A, B, C_1 forment un triangle équilatéral de 1 cm de coté. A partir de ces trois points, pour dessiner une spirale à trois centres, on trace des arcs de cercle successifs ayant pour centres, dans l'ordre, A, B, C_1, A, B, C_1, ..., se raccordant comme sur le dessin. On décide de s'arrêter au point C_{92}. Il faut bien sûr beaucoup de patience et une grande feuille de papier, mais **quelle est donc la longueur de la spirale ainsi dessinée, entre les points C_1 et C_{92} ?**



Quarts de finale ouverts 92

5 LA FAMILLE AMOUR

Dans la famille Amour, on se marie très jeune et on ne devient pas centenaire. Actuellement, quatre générations sont en vie. Fidèle, Juste, Parfait et Constant, qui sont tous les quatres des fils uniques, représentent, dans le désordre, ces quatre générations (arrière grand-père, grand-père, père, et fils). Le produit des âges de Constant et Parfait est 1992.
La différence d'âge entre Juste et Parfait est un diviseur de 1992.
Enfin, Juste a été père un an plus jeune que Fidèle.

Quel est l'âge de Fidèle ?

6 LES THEODOLITES

Albert, Béatrice, Claude, Dominique, Elodie, et Francis sont des apprentis géomètres, et s'exercent à mesurer des angles avec des théodolites. Ils se disposent dans un grand champ plat, et plantent chacun un bâton que l'on identifiera avec son propriétaire.

- Albert, Béatrice, et Elodie sont alignés,
- Albert, Claude, et Francis sont alignés,
- Béatrice, Dominique, et Francis sont alignés,
- Claude, Dominique, et Elodie sont alignés,

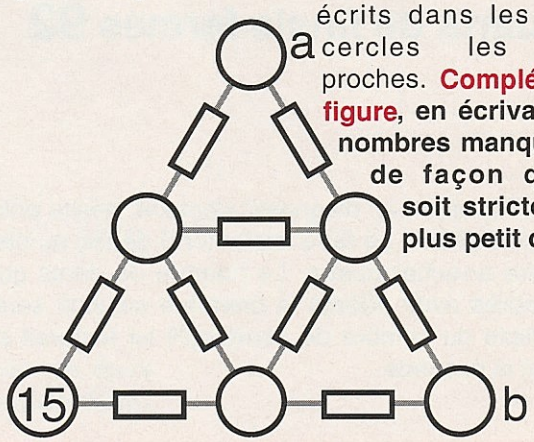
Mais Albert, Béatrice, et Claude ne sont pas alignés !

- Après mesures au théodolite, il ressort que :
- Béatrice voit Dominique et Elodie sous le même angle que celui sous lequel elle voit Claude et Francis
- Claude voit Béatrice et Elodie sous le même angle que celui sous lequel il voit Dominique et Francis
- Dominique voit Béatrice et Claude sous un angle double de celui sous lequel Albert voit Béatrice et Claude.

Sous quel angle Albert peut-il voir Elodie et Francis ?

7 TRIANGLE DES DIFFERENCES

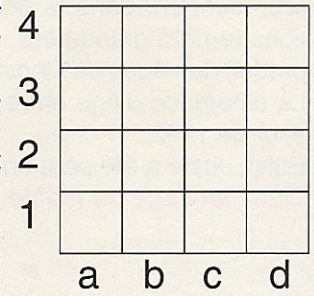
On veut écrire les nombres entiers de 1 à 15 dans les cercles et les rectangles de la figure ci-dessous, de telle sorte que chaque nombre écrit dans un rectangle soit égal à la différence des deux nombres écrits dans les deux cercles les plus proches. **Complétez la figure, en écrivant les nombres manquants, de façon que a soit strictement plus petit que b.**



8 TAPIS D'OR

Le sultan Al Djebra aimait autant les pièces d'or que les récréations mathématiques. Aussi, lorsqu'il imposait un tribut aux habitants d'une nouvelle ville, il leur posait le problème suivant :

"Voici un carré de seize cases. Sur chacune de ces cases, vous devrez disposer un gousset contenantt une ou plusieurs pièces d'or.



Attention! Deux goussets contenant le même nombre de pièces ne devront jamais se trouver sur une même ligne, sur une même colonne, ni sur une même diagonale, grande ou petite (ainsi, par exemple, deux goussets contenant 3 pièces chacun ne peuvent se trouver l'un en a_2, et l'autre en c_4)"

Après ces fortes paroles, les sages du village n'avaient plus qu'à s'exécuter...

Mais il fallait trouver une disposition faisant intervenir le moins de pièces possible...

Quel est le nombre minimum de pièces d'or à donner ? (on indiquera une disposition possible correspondante).

9 DES PARIS ET DES HOMMES

Voici la cote des chevaux dans la quatrième d'Auteuil :

Toccar II	2 contre 1
Belle Karn	5 contre 2
Piteu III	6 contre 1
Cassepat	6 contre 1

(Si vous pariez 10F sur un cheval à 5 contre 2, et si ce cheval arrive premier, vous gagnez 25F et vous reprenez votre mise de 10F; dans le cas contraire vous perdez votre mise)

Montrez qu'on peut être certain de gagner exactement 1000F (outre la récupération de la mise), quelle que soit l'issue de la course. On indiquera en face de chaque cheval la mise proposée.

quarts de finale fermés 92

1 LA MACHOIRE A JEAN

Jean SIVE, après un diagnostic dentaire, hésite entre deux possibilités : se faire implanter 3 dents, ou bien s'en faire arracher quatre. Le nombre de dents qu'il aurait après avoir adopté la première solution serait un multiple du nombre de dents qu'il lui resterait s'il adoptait la seconde.

Combien Jean a-t-il de dents (avant traitement)?

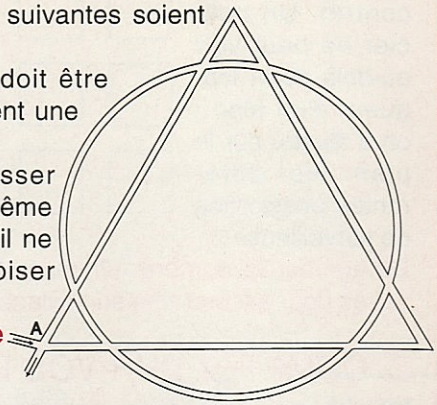
2 LA FILLE D'ARIANE

La fille d'Ariane se trouve en A, munie d'une bobine de fil.

Elle doit parcourir le labyrinthe, puis revenir en A, et sortir, en déroulant son fil derrière elle, de telle sorte que les conditions suivantes soient respectées :

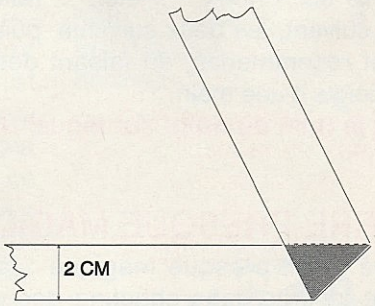
- Chaque couloir doit être parcouru exactement une fois
- Ariane peutt passer deux fois par le même carrefour, mais le fil ne doit jamais se croiser lui-même.

Dessinez le fil de la fille d'Ariane.



3 PRENEZ LE BON PLI

La bande de papier représentée ci-dessous, dont les bords sont parallèles, mesure deux centimètres



delarge. On plie cette bande en deux (voir le dessin).

Quelle est l'aire minimum de la région (en grisé sur le dessin), où deux épaisseurs de papier se superposent ? On donnera la réponse en centimètres carrés, arrondie au centième.

4 UN AN DEJA

Cette grille est composée de 9 chiffres tous différents. Elle révèle trois nombres écrits horizontalement : 649, 530, et 812, dont la somme est égale à 1991, et trois nombres écrits verticalement (de haut en bas) : 658, 431, et 902, dont la somme est égale, elle aussi, à 1991.

6	4	9
5	3	0
8	1	2

Mais un an s'est écoulé, et nous sommes dans le Championnat 1992. Alors complétez la grille ci-dessous à l'aide de neuf chiffres tous différents, de manière que les trois nombres écrits horizontalement aient pour somme 1992, de même que les trois nombres écrits verticalement (de bas en haut).

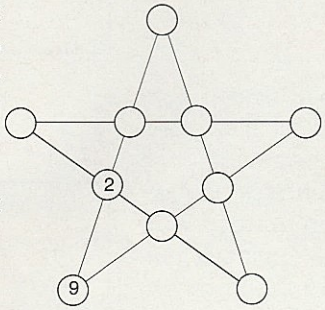
• • •
• • 3
• • •

5 PIM, PAM, POUM

Pim, Pam, et Poum participent à une réunion d'athlétisme. A la fin de chaque épreuve, des points sont attribués pour les première, deuxième, et troisième places (les nombres de points attribués sont les mêmes dans les différentes épreuves, et le premier obtient plus de points que le second, qui en a lui-même plus que le troisième).
A la fin de la compétition, Pim totalise 22 points, alors que Pam et Poum sont ex-aequo avec 9 points. Personne d'autre qu'eux trois n'a pu gagner de points.
Pam a été premier au lancement du javelot.
Mais sauriez-vous donner les noms des trois premiers dans le 100 mètres ?

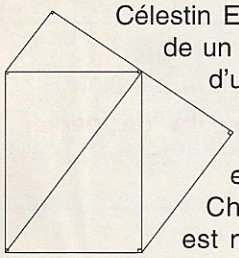
6 JAMAIS MOINS DE TROIS

On veut remplir les dix cercles de ce pentagramme à l'aide des dix nombres de 1 à 10, de telle sorte que la différence entre deux nombres placés dans des cercles reliés par un segment soit toujours au moins égale à 3.



Les nombres 2 et 9 étant déjà placés, complétez le pentagramme en respectant la condition imposée

7 LE PRÉ D'ESTINÉ



Célestin Estiné, propriétaire estimé, possède un pré de forme pentagonale, formé d'un rectangle ABCD flanqué de deux triangles FAD et EDC respectivement rectangles en F et E (F, D, et E sont alignés). Chacun des côtés du pentagone est mesuré par un nombre entier de mètres.
Sachant que BD est perpendiculaire à EF, quel est le plus petit périmètre possible du pré d'Estiné ?

8 LES 8 REGLES

Quelle longueur de cordelette doit-on prévoir, au minimum, pour attacher ensemble huit règles de bois de section carrée de un centimètre de côté, sachant qu'il faut au moins 5 centimètres pour faire le noeud ? (On donnera le résultat en centimètres, arrondi au millimètre le plus proche).

9 LA FORET DES MILLE ET UN DIABLES

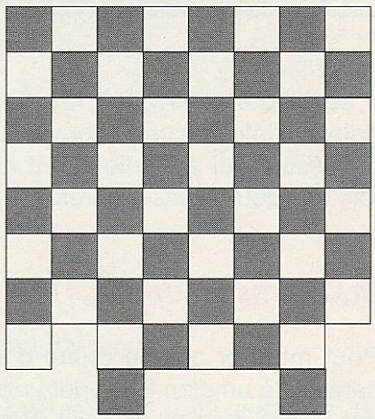
Le chevalier José Gefons s'apprêtait bien imprudemment à pénétrer dans la forêt des mille et un diables, forêt triangulaire redoutable, quand un diablotin l'arrêta :
_ N'y pénètre pas si vite! Tu es au sommet A, tu dois aller par le plus court chemin jusqu'au côté BC. Là-bas, un énorme diable te demandera le nombre exact de mètres que tu as parcourus en forêt. Gare à toi si tu l'ignores !
_ Encore un renseignement contre ma lance ! dit José
Je parle en mètres, reprit le diablotin. Si j'ajoute un au grand côté de la forêt, je trouve le même nombre qu'en multipliant par trois la différence entre le petit côté et onze. Si j'ajoute un au côté intermédiaire, j'obtiens les vingt-cinq neuvièmes du petit côté.
_ Ce n'est pas suffisant, grogna José, va pour mon cheval !
_ Bien : si chaque côté de la forêt était augmenté d'un nombre de mètres égal à mon année de naissance, le nouveau périmètre serait de 10500 m.
_ Mon épée contre ton année de naissance, implora José.
_ Eh bien, sache que je suis né au vingtième siècle, et que mon année de naissance est égale à la différence de deux cubes d'entiers impairs consécutifs!
José partit alors à pied, et traversa la forêt. Quelle réponse a-t-il donné au gros diable ? (on arrondira au mètre le plus proche).

10 LES PLAQUETTES DE JOSETTE

Josette a disposé neuf plaquettes numérotées de 1 à 9 dans un sac. Elle en tire trois d'un seul coup. Avec ces trois plaquettes, en permutant les chiffres, elle forme tous les nombres à trois chiffres possibles, sauf un. La somme des cinq nombres ainsi formés est comprise entre 1982 et 1992.
Quel nombre Josette a-t-elle oublié ?

11 DAMECHIQUIER

Comment découper ce morceau de damier en deux parties de façon à pouvoir reconstituer un échiquier (de 8 cases sur 8 cases) en réassemblant convenablement ces deux parties ?



12 LA TIRELIRE DE JULIEN

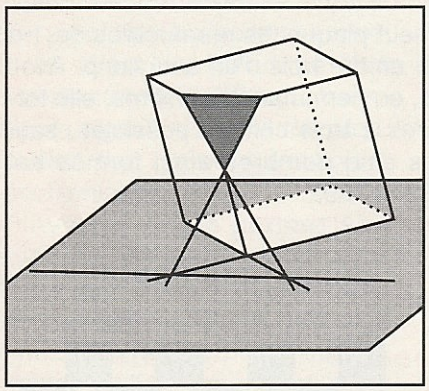
Julien a cassé sa tirelire, et constate qu'il y a 1992 pièces, que les pièces de 10F, 5F, et 2F sont en nombre égal, que les pièces de 1F, 50 centimes, et 20 centimes sont, elles aussi, en nombre égal, et qu'il y a autant de pièces de 10 centimes que de pièces de 5 centimes.
La montant de la cagnotte s'élève à ... 1992F.
Combien y a-t-il de pièces de 1F ?

Réponses dans le prochain numéro

SOLUTIONS

des problèmes pages 22 à 25

Alignements utiles



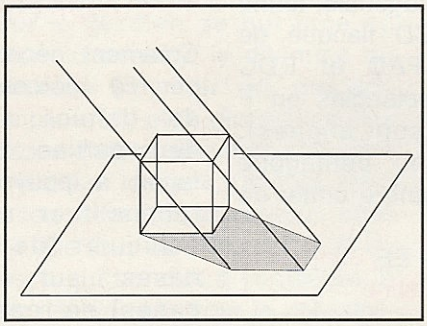
Il suffit de construire les deux points d'intersection représentés ci-dessus, qui appartiendront à la fois aux deux plans ombrés.

Des méthodes ...

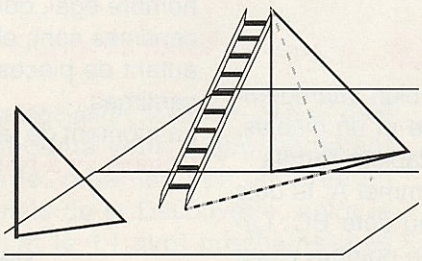
Pour montrer qu'une droite d est parallèle à un plan P, on peut montrer qu'elle n'a pas de point d'intersection avec P, qu'elle est parallèle à une droite de P, qu'elle est orthogonale à une perpendiculaire à P, qu'elle est parallèle à un plan parallèle à P...
Pour montrer que trois points A, B, C sont alignés, on peut montrer (comme dans le plan) que les droites (AB) et (AC) sont parallèles, ou qu'ils appartiennent à la fois à deux plans sécants ...
Pour montrer que deux plans sont parallèles, on peut montrer que deux droites sécantes de l'un sont parallèles à l'autre, qu'ils sont perpendiculaires à une même droite, parallèles à un même plan ...
Pour montrer que deux plans sont sécants, on peut montrer qu'ils ont au moins un point commun, sans être confondus, ou montrer que l'un d'eux est parallèle à un plan sécant à l'autre, ou encore, trouver la droite d'intersection ...
Pour montrer qu'une droite d et un plan P sont perpendiculaires, on peut montrer que d est perpendiculaire à deux droites du plan, qu'elle est perpendiculaire à un plan parallèle à P, ou qu'elle est parallèle à une droite perpendiculaire à P ...

Marche à l'ombre

Pour le cube, on peut utiliser que les arêtes parallèles au plan vont se projeter suivant des segments parallèles (sinon les arêtes couperaient le plan). Ces arêtes, leur ombre et les rayons lumineux qui les joignent forment alors un parallélogramme. Les arêtes et leur ombre ont donc même longueur. Ceci permet de construire l'ombre des autres sommets.

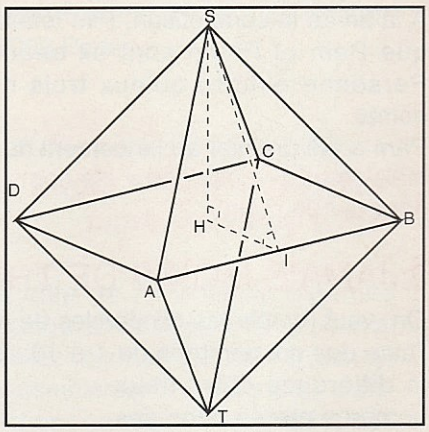


L'échelle : supprimer le mur et utiliser l'ombre du bâton pour représenter l'ombre de l'extrémité supérieure de l'échelle. Tracer alors l'ombre de l'échelle. Il ne reste plus qu'à remettre le mur pour finir l'ombre de l'échelle.

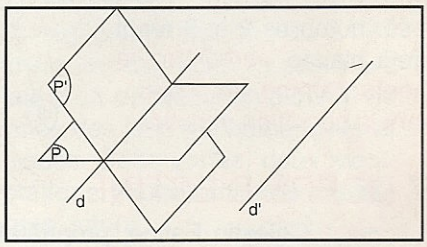


L'octaèdre dévoilé

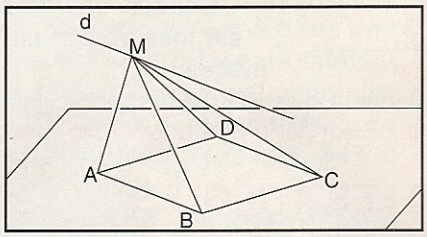
AI = $5\sqrt{3}$, d'où SH = $5\sqrt{2}$, et tan (SAH) = $\sqrt{2}$. D'où, aussi , l'angle ASH, et les deux angles cherchés : environ 109,47° pour le premier et 70,53° pour le second.



Parallèles



Soit A sur d. Le plan (d', A) coupe P suivant la parallèle à d' contenant A. De même pour P'. Donc cette parallèle à d' n'est autre que d.



Dans le deuxième exercice, on peut appliquer cette propriété à la droite (AB), parallèle aux plans (ABM) et (CDM).

Alignés !

M est dans le plan $A_1A_2A_3$, car il est sur A_1A_2, et dans le plan $B_1B_2B_3$, car il est sur B_1B_2. De même pour L et N. Ces trois points sont donc alignés sur l'intersection des deux plans.

L'AVENTURE MATHÉMATIQUE S'AFFICHE

Pour décorer votre chambre, votre salle de classe, une série d'affiches 40 cm x 60 cm décline l'aventure mathématique dans des contextes variés. Les trois premières sont disponibles. Attention toutefois : le tirage a été limité à 500 exemplaires. Ne tardez pas à passer votre commande !

Un Outil Précieux

Le Mini-Dicomatic

Vous y trouverez une définition claire de tous les termes mathématiques que vous serez amené à rencontrer.

Bon de commande à envoyer à Tangente, 11 bis, rue Henri Wallon, 95100 Argenteuil
avec votre règlement à l'ordre de : "Editions Archimède".

NOM : ..... Prénom : .....

Adresse : .....

Code postal : ..... Ville : .....

Une affiche : 25 F

Deux affiches : 30 F

Trois affiches : 35 F

Ces prix comprennent le port sous étui rigide.

Mini-dicomatic : 28 F

Je choisis les affiches :

n° 1 La découverte du nombre π !_!

n° 2 Détective privé !_!

n°3 Le cimetière des parenthèses !_!

(Indiquez le nombre d'exemplaires dans les bacs.)

Je commande .... exemplaire(s) du mini-dicomatic

UNE BONNE IDéE !

LES ABONNEMENTS GROUPÉS

Vous aimez Tangente ....

Vous voulez faire partager votre plaisir à vos ami(e)s ...

Rassemblez quatre d'entre eux, ou davantage, et abonnez-vous tous ensemble.

Vous bénéficierez d'un tarif réduit : 135 F seulement l'abonnement d'un an.

En plus, chacun d'entre vous recevra en cadeau un mini-dicomatic, ce mini-dictionnaire mathématique où vous trouverez toutes les définitions dont vous avez besoin.

Bulletin d'abonnement groupé
à envoyer à Tangente, 11 bis, rue Henri Wallon, 95100 Argenteuil

135 F l'abonnement d'un an ; tarif valable jusqu'au 30 avril 1992.
Réservé pour l'abonnement de 5 personnes au minimum appartenant au même établissement.

Etablissement : .....

.....

Responsable de la commande :

NOM : ..... Prénom : .....

Adresse : .....

Code postal : ..... Ville : .....

Joindre la liste des noms et des adresses des autres abonnés sur une feuille séparée.

Je joins un chèque de 135 F x .... = ... F à l'ordre de : "Editions Archimède".

SOLUTIONS

des énigmes du numéro 24

Le coin du matheux littéraire

Il s'agissait d'un extrait de « Brazzaville Plage » de William Boyd.Le premier lecteur a avoir répondu est Cécile Delangle.

Qui a dit ?

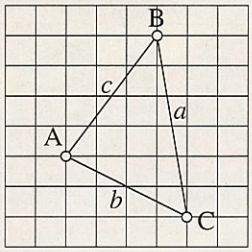
L'étude en général, la poursuite de la vérité et de la beauté, sont des domaines dans lesquels il nous est permis de rester enfants toute la vie.

Pas de réponse, à l'heure actuelle pour trouver l'auteur de cette citation.

Niveau avant-bac

Un quadrillage à maille carrée recouvre le plan. On construit un triangle ABC *de telle sorte que ses sommets coïncident avec des nœuds du quadrillage.*
Montrer que si AB > AC, *alors* AB – AC > 1 / *p*,
où p désigne le périmètre du triangle.

(Il était implicite dans l'énoncé que la maille était de côté unité).
On pose BC = a, AC = b, AB = c et $p = a + b + c$.
On a $c > b$ qui donne $c^2 > b^2$ et donc $c^2 - b^2 > 0$.



Comme de plus on travaille sur un quadrillage à maille carrée, en appliquant le théorème de Pythagore, on trouve que c^2 et b^2 sont des entiers, d'où $c^2 - b^2 > 1$, et comme $b > 1$, on en déduit

$$c^2 - b^2 \geqslant 1.$$

$(c - b)(c + b) > 1$ entraîne

$$(c - b)(a + b + c) > 1$$

puisque $a > 0$, soit encore

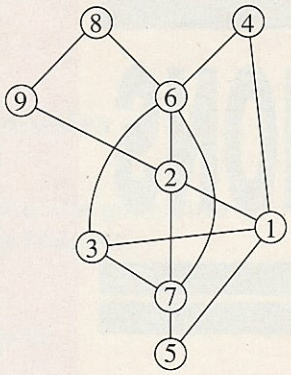
$$\boldsymbol{c - b > 1 / p}.$$

C'est Matthieu Dazy, de Nancy, qui nous a fait parvenir la meilleure solution. C'est donc lui qui gagne la calculatrice HP 20S.

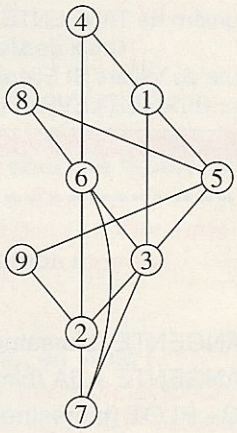
Niveau post-bac

Les joueurs d'un club de tennis participent à une compétition de matchs en simple. Après chaque partie, un classement des joueurs est calculé de la manière suivante. En partant du résultat le plus récent et en remontant dans le temps, on utilise le résultat du match pour construire un ordre partiel, en ignorant tout match contradictoire avec des résultats plus récents. On s'arrête lorsque l'ordre est total. ***Un joueur peut-il améliorer sa position dans le classement en perdant intentionnellement un match ?***

Considérons les joueurs numérotés de 1 à 9. Les matchs rangés dans l'ordre chronologique sont les suivants (le joueur nommé en premier est le vainqueur de la rencontre) : 8-5, 6-3, 3-2, 6-2, 8-9, 4-6, 5-9, 8-6, 6-7, 1-5, 1-3, 9-2, 7-5, 3-7, 4-1, 2-7.
Pour calculer le classement, il faut tenir compte du fait que 2 sera mieux classé que 7, 4 que 1, etc. Un moyen de procéder est de calculer un graphe non orienté, duquel on pourra définir le classement. Parmi ces matchs, on ne tient pas compte de certains : ceux qui sont redondants (J1-J2, alors qu'il existe déjà un chemin entre J1-J2), ceux qui sont contradictoires (les rajouter dans le graphe créerait un cycle). Pour l'établissement du graphe 1, on a ainsi négligé les matchs 5-9, 3-2, 8-5.



On voit que 3 est classé cinquième (8 et 4 sont premiers ex-aequo, 9 et 6 sont deuxièmes ex-aequo, 2 est troisième, 1 est quatrième).
Le match suivant est 5-3. On construit donc un nouveau graphe et l'on s'aperçoit que 3 qui vient de perdre est passé de la cinquième à la quatrième place, ce qui permet de répondre positivement au problème.

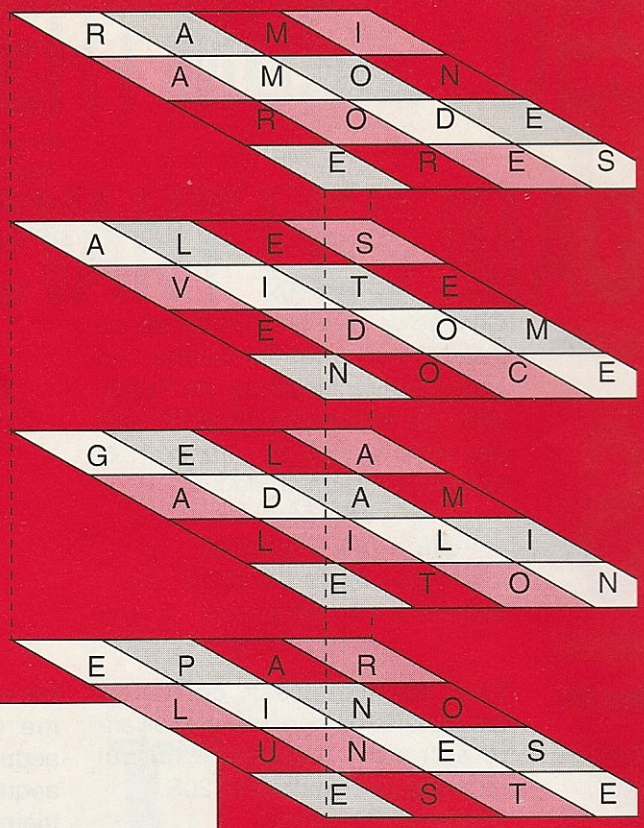


C'est Vincent Schadler qui gagne la HP 27S.

Comment est désigné le gagnant d'un jeu ?

Le responsable de la rubrique "Jeux et problèmes" attend un mois après la parution d'un numéro de Tangente pour faire le tri des réponses aux différentes questions posées. Il demande alors à son fils agé de neuf ans de tirer au sort le nom du gagnant parmi les bonnes réponses. Les abonnés qui recoivent Tangente avec un certain retard ne sont donc pas défavorisés.

SOLUTIONS



ICONOGRAPHIE

Crédit photo :
Couverture : Jean-Pierre Gerbal
Pages 5 et 7 : Photos du film "Les désarrois de l'élève Törless" - La revue du Cinéma.
Page 29 : Alinari - Viollet, Boyer Viollet
Pages 33, 35 : Jean-Pierre Gerbal

Dessins : Laurent Van Offel (pp 10,11,13,14,34)
Vanara Ty (pp 17, 18)

Ce numéro de TANGENTE a été imprimé Z.I
Croix de Metz
Route de Villiers St Etienne 54200 TOUL
par BERGER LEVRAULT, Imprimeur

TANGENTE

Publié par :
Les Editions Archimède
SARL au capital de 55 900 F
Siège social 11 bis allée H. Wallon
95100 Argenteuil

Avec le concours du CENTRE NATIONAL DES LETTRES
Commission paritaire : 69 890
Dépôt légal à parution

Directeur de la Publication
Daniel TEMAM

Direction de la Rédaction
Gilles COHEN
Francis DUPUIS
Daniel TEMAM

P.A.O.
Francis CASIRO, Francis DUPUIS, Pierre-Yves DUPUIS, Daniel TEMAM

Gestion, Abonnements
Joseph CESARO
assisté de Martine QUEDE
Tél 14h à 18h : 39 98 83 50

Promotion
Gilles COHEN
Francis DUPUIS
assisté de Cécile DALIDO
et Sébastien BUSCH

Publicité
Ariane Sponsorégie
Julie Hubert
16 rue du Colisée 75 008 Paris
☎ 42 25 05 55

BULLETIN D'ABONNEMENT

à adresser aux Editions Archimède 11 bis allée H. Wallon - 95100 Argenteuil
Tarifs valables jusqu'au 31/03/92 -

☐ TANGENTE (bimestriel)	☐ 1 an 152 F (6 nos)	☐ 2 ans 280 F	Etranger + 45 F par an
☐ TANGENTE + JA (bimestr)	☐ 1 an 212 F (12 nos)	☐ 2 ans 400 F	Etranger +70 F par an
☐ TG+ PLOT (trimestriel)	☐ 1 an 215 F (10 nos)	☐ 2 ans 420 F	Etranger + 85 F par an
☐ TG + PLOT + JA	☐ 1 an 275 F (16 nos)	☐ 2 ans 500 F	Etranger + 110 F par an

Je joins un chèque libellé à l'ordre des Editions Archimède
NOM : ..... Prénom : .....
ADRESSE : .....
Code Postal : ..... Ville : .....
En cas de réabonnement, précisez votre numéro : .....
Pour les enseignants et élèves indiquez votre qualité : ❐ enseignant ❐ élève et les noms et adresse de votre établissement : .....
Anciens numéros 28 F pièce. Les numéros 1, 2, 3 et 14 sont épuisés.

☐ N°4 ☐ N°5 ☐ N°6 ☐ N°7 ☐ N°8 ☐ N°9 ☐ N°10 ☐ N°11 ☐ N°12 ☐ N°13
☐ N°15 ☐ N°16 ☐ N°17 ☐ N°18 ☐ N°19 ☐ N°20 ☐ N°21 ☐ N°22 ☐ N°23 ☐ N°24

Le Jeune Archimède

10 ans après le "Petit Archimède"

Tous les deux mois, un rendez-vous scientifique et mathématique à la portée des collégiens.

Bulletin d'abonnement à adresser aux Editions Archimède 11 bis allée Henri Wallon 95 200 Argenteuil

OUI, je m'abonne à JA (6 numéros par an)

☐ JA seul	☐ 1 an 80 F	☐ 2 ans 140 F	Etranger +25 F par an
☐ JA + TANGENTE	☐ 1 an 208 F	☐ 2 ans 390 F	Etranger +70 F par an

Je joins un chèque libellé à l'ordre des Editions Archimède

NOM : ..... Prénom : .....

ADRESSE : .....

Code Postal : ..... Ville : .....

Profession : 1 collégien 2 lycéen 3 enseignant 4 autre

Si vous voulez faire partie de la nouvelle génération, il est temps de passer à Hewlett-Packard

SAATCHI & SAATCHI ADVERTISING

G rouper dans un seul instrument la portabilité d'une calculatrice et la puissance d'un terminal intelligent ; seul HEWLETT-PACKARD relève le défi en lançant le calculateur HP 48 SX.

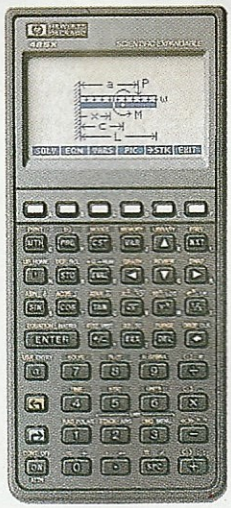
E xtraordinaire évolution dans le monde scientifique. Les ingénieurs et les universitaires les plus exigeants peuvent travailler sur les nombres comme sur les variables ou les formules. Le HP 48 SX vous permettra de résoudre les problèmes les plus complexes très rapidement et sans risque d'erreur.

N on content de vous offrir 8 sortes de graphiques différents, le HP 48 SX se connecte à votre micro -compatible IBM, MACINTOSH et bien sûr HP Vectra - partage son imprimante, ses programmes, son accès réseaux.

I maginez le dynamisme que vous allez donner à vos recherches, les nouvelles performances à votre portée... Le HP 48 SX deviendra le meilleur auxiliaire de votre développement.

E t maintenant, pour faire partie de la nouvelle génération, renseignez-vous auprès de nos distributeurs agréés : une courte démonstration vaut mieux que de longs calculs.

CALCULATEURS HEWLETT-PACKARD
Ils travaillent mieux. Vous aussi.



HP 48 SX

Principaux points de ventes : Auchan - Buroplus - Camif - Darty - Fnac - Majuscule - Plein Ciel. **Paris et R.P. :** Compta-France (46.03.76.40) - Duriez (43.29.05.60) - Infopoint (40.54.07.77) - La Règle à calcul (43.25.68.88) - Maubert Electronique (43.29.40.04). **Province :** Sud-Est : DOM (78.72.49.52) - Le Pont Equipements (78.73.02.88) - Sud-Ouest : Action Informatique (61.73.81.82). **HP assistance :** 40.89.00.08.